Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

PD Dr. W.-P. Düll

Blatt 5 Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen 25.11.2015

Aufgabe 15.

a) Zeigen Sie, dass die Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A = a_1 A + a_2 \partial_X^2 A + a_3 A\,|A|^2$$

mit $\operatorname{Re} a_3 > 0$, $\operatorname{Re} a_2 > 0$, $\operatorname{Re} a_1 > 0$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ durch Reskalieren von A, X und T auf die Normalform

$$\partial_T A = A + (1 + \mathrm{i}\alpha)\,\partial_X^2 A - (1 + \mathrm{i}\beta)\,A\,|A|^2$$

gebracht werden kann.

b) Zeigen Sie, dass die NLS-Gleichung

$$\partial_T A = \mathrm{i}\nu_1 \partial_X^2 A + \mathrm{i}\nu_2 A\,|A|^2$$

mit $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$ durch Reskalieren von A, X und T auf die Normalform

$$\partial_T A = -\mathrm{i}\partial_X^2 A + \mathrm{i}\alpha A\,|A|^2$$

mit $\alpha = \pm 1$ gebracht werden kann.

Aufgabe 16.

a) Zeigen Sie, dass die NLS-Gleichung zusätzlich zur Translationsinvarianz die folgenden Invarianzen besitzt, d.h., wenn $u(x,t)$ die NLS-Gleichung

$$\partial_t u = -\mathrm{i}\partial_x^2 u + \mathrm{i}\alpha u\,|u|^2$$

löst, dann lösen auch

$$\begin{aligned} v(x,t) &= u(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \\ v(x,t) &= u(x-ct,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(c^2 t - 2cx)/4}, \\ v(x,t) &= \eta u(\eta x, \eta^2 t) \end{aligned}$$

für alle $\varphi, c, \eta \in \mathbb{R}$ die NLS-Gleichung.

b) Zeigen Sie, dass die Solitonen

$$u(x,t) = \sqrt{2}\eta \operatorname{sech}\left(\eta(x - x_0 - ct)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}((c^2 - 4\eta^2)t - 2cx + \gamma)/4}$$

für beliebig gewählte $\eta, c, \gamma, x_0 \in \mathbb{R}$ exakte Lösungen der fokussierenden NLS-Gleichung sind.

Aufgabe 17.

a) Schreiben Sie

$$\partial_t u = -\mathrm{i}\partial_x^2 u - \mathrm{i}u\,|u|^4$$

als Hamiltonsches System.

b) Gibt es Pulslösungen der obigen Gleichung?

Aufgabe 18.

Betrachten Sie die Gleichung

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + u - u^3 = 0$$

mit $x, t \in \mathbb{R}$ und $u(x,t) \in \mathbb{R}$. Setzen Sie den Ansatz

$$u(x,t) = \varepsilon A(\varepsilon(x+ct), \varepsilon^2 t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x + \omega_0 t)} + \text{c.c.}$$

mit $0 < \varepsilon \ll 1,\ c, k_0, \omega_0 \in \mathbb{R},\ A(X,T) \in \mathbb{C}$ in die Gleichung ein und setzen Sie die Koeffizienten bei $\varepsilon^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x + \omega_0 t)}$ für $j = 1, 2, 3$ gleich 0. Welche Gleichungen ergeben sich dabei?