Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

PD Dr. W.-P. Düll

Blatt 6 Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen 9.12.2015

Aufgabe 19.

Untersuchen Sie, für welche $c > 0$ die KPP-Gleichung Frontlösungen der Form $u_f(x,t) = v(x - ct) = v(\xi)$ mit $0 \leqq v(\xi) \leqq 1$, $\lim_{\xi\to-\infty} v(\xi) = 1$ und $\lim_{\xi\to\infty} v(\xi) = 0$ besitzt. Finden Sie heraus, dass

a) für $0 < c < 2$ solche Frontlösungen nicht existieren.

b) für jedes $c \geqq 2$ genau eine solche Frontlösung existiert und diese Frontlösung streng monoton fallend ist.

Hinweis: Zeigen Sie bei b), dass für geeignet gewähltes $k > 0$ keine Trajektorie des dynamischen Systems für (v, v') das Gebiet $R(k) = \{(v, v') : 0 < v < 1, -kv < v' < 0\}$ verlassen kann.

Aufgabe 20.

Zeigen Sie, dass die Frontlösungen u_f aus Aufgabe 19 instabil in $C^0_{b,\mathrm{unif}}(\mathbb{R})$ sind.

Hinweis: Betrachten Sie die Lösungen u der KPP-Gleichung mit $u(x,0) = \max\{u_f(x,0), \delta\}$ für hinreichend kleine $\delta > 0$.

Aufgabe 21.

Zeigen Sie, dass die Solitonen

$$u(x,t) = -2c\,\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{c}(x - 4ct)\right)$$

für beliebig gewählte $c > 0$ exakte Lösungen der KdV-Gleichung sind.