Blatt 7 Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen 16.12.2015

Aufgabe 22.

Sei $L(t) = L(t)^T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und

$$L(0) = U(t)^T L(t) U(t) \quad \text{mit} \quad U(t)U(t)^T = Id.$$

Zeigen Sie, dass $L = L(t)$ die Gleichung

$$\partial_t L = ML - LM$$

mit $M = (\partial_t U)U^T = -U\partial_t U^T = -M^T$ erfüllt und folglich die Eigenwerte von $L(t)$ unabhängig von t sind.

Aufgabe 23.

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von $L\psi = \psi'' - u(x)\psi$ im Falle von $u(x) = -U_0\delta(x)$, wobei U_0 eine positive Konstante und δ the Dirac-Distribution ist.

Aufgabe 24.

Betrachten Sie die Lösung

$$u(x,t) = -12\frac{3 + 4\cosh(2\xi + 24t) + \cosh(4\xi)}{(3\cosh(\xi - 12t) + \cosh(3\xi + 12t))^2}$$

mit $\xi = x - 16t$ der KdV-Gleichung. Zeigen Sie, dass sich diese Lösung für $t \to \pm\infty$ in zwei einzelne Wellen aufspaltet, das heißt, es gilt

$$u(x,t) \sim -8\,\mathrm{sech}^2\left(2\xi \mp \frac{1}{2}\log 3\right) - 2\,\mathrm{sech}^2\left(\eta \pm \frac{1}{2}\log 3\right)$$

mit $\eta = x - 4t$, wobei $\sim$ asymptotisch gleich bedeutet.