Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

I. Hilfsmittel

1.1. Funktionenräume

Sei: • $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge.
• $\bar{\Omega}$ der Abschluß.

Der Vektorraum der stetigen Fkt.-en auf $\bar{\Omega}$ ist

$$\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}) = \{u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \mid u \text{ ist stetig}\}.$$

Der Vektorraum der m-mal stetig diff.-baren Fkt.-en auf $\bar{\Omega}$ ist

$$\mathcal{C}^m(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) = \{u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \partial_x^j u \text{ ist stetig für } |j| = 0, \dots, m\}.$$

Sei: • $\|u\|_{\mathcal{C}_b^0} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$

• $\|u\|_{\mathcal{C}_b^m} := \sum_{0 \le |j| \le m} \|\partial_x^j u\|_{\mathcal{C}_b^0}$, wobei $|j| = j_1 + \dots + j_d$.

Sei nun für jedes $m \ge 0$

$$\mathcal{C}_b^m(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \mid \|u\|_{\mathcal{C}_b^m} < \infty\}.$$

Dann ist $\mathcal{C}_b^m(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ ein Banachraum.

Weiter sei:

• $\mathcal{C}_{b,unif}^m(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) = \{u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \partial_x^j u \text{ ist glm. stetig für } |j| = 0, \dots, m ; \|u\|_{\mathcal{C}_b^m} < \infty\}$.

• $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ ist beliebig oft diff.-bar}\}$.

• $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \mid u \text{ hat kompakten Träger in } \Omega\}$

• $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) = \{u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \mid u \text{ ist Hölderstetig mit Exponent } \alpha, \|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} < \infty\}$,

wobei: • $\alpha \in [0,1]$

• $\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} = \|u\|_{\mathcal{C}_b^0} + \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}$

~~[illegible]~~

Für $d=1$ sind das die Lipschitz-stetigen Fkt.-en.

- $\mathcal{C}^{m,\alpha}(\bar\Omega,\mathbb{R}) = \{ u:\bar\Omega\to\mathbb{R} \mid \partial_x^j u \in \mathcal{C}^0$ für $|j| = 0,\dots,m$; $\partial_x^j u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$;

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{m,\alpha}} = \|u\|_{\mathcal{C}^m_b} + \sum_{|j|=m} \|\partial_x^j u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} < \infty \}.$$

<u>Lebesgue- und Sobolevräume:</u>

- $L^p(\Omega,\mathbb{R}) = cl_{\|\cdot\|_{L^p}}^{\text{Abschluß}}(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}))$, wobei

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \text{f.a. } p\in[1,\infty).$$

- $W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}) = cl_{\|\cdot\|_{W^{m,p}}}(\mathcal{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R}))$, falls Ω beschränkt ist.

$W_0^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}) = cl_{\|\cdot\|_{W^{m,p}}}(\mathcal{C}_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}))$, wobei

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{j=0}^{m} \|\partial_x^j u\|_{L^p}.$$

$H^m_{[0]}(\Omega,\mathbb{R}) = W^{m,2}_{[0]}(\Omega,\mathbb{R})$.

Die Räume $W^{m,p}$ und $W_0^{m,p}$ sind alle Banachräume, H^m und H^m_0 sogar Hilberträume.
Alle diese Räume heißen Sobolevräume.

<u>Alternative Charakterisierung:</u>

Die Fkt. $\partial_x^j u \in L^p(\Omega,\mathbb{R})$ ist <u>m-te schwache Ableitung</u> von $u\in L^p(\Omega,\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$

$$\forall_{\Phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega,\mathbb{R})}: \int_\Omega (\partial_x^m u)(x)\,\Phi(x)\,dx = (-1)^{|m|} \int_\Omega u(x)\,(\partial_x^m \Phi)(x)\,dx.$$

Es gilt:

$W^{m,p}(\Omega,\mathbb{R}) = \{ u:\Omega\to\mathbb{R} \mid \partial_x^j u \in L^p$ für $|j| = 0,\dots,m$; $\|u\|_{W^{m,p}} < \infty \}$,
wobei $\partial_x^j u$ die j-te schwache Ableitung von u ist.

$L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ ist der Raum aller meßbaren Fkt.-en $u:\Omega\to\mathbb{R}$ mit

- $\sup_{x \in \Omega \setminus N} |u(x)| < \infty$.
  $N \hat{=}$ Nullmenge

- $\|u\|_{L^\infty} = \inf_{N \hat{=} \text{Nullmenge}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |u(x)|$

- $\|u\|_{W^{m,\infty}} = \sum_{j=1}^{\infty} \|\partial_x^j u\|_{L^\infty}$

$$W^{m,\infty}(\Omega, \mathbb{R}) = \{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} \mid \partial_x^j u \text{ ex. für } j = 0, \dots, m \text{ und } \|u\|_{W^{m,\infty}} < \infty \}.$$

16.04.12

Beziehungen zwischen Sobolevräumen und den klassischen Räumen:

Es gilt der Sobolevsche Einbettungssatz [Alt; Satz 8.8]:

$$W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}) \hookrightarrow C^{n,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$$

falls $m - \frac{d}{p} \geq n + \alpha \quad (\Omega \in \mathbb{R}^d)$

aus schwacher Ableitung folgt so auch Starke
⇒ finde schwache und gilt die Abschätzung

d.h. $\exists C > 0 \; \forall u \in W^{m,p} : \|u\|_{C^{n,\alpha}} \leq C \|u\|_{W^{m,p}}$

In einer Raumdimension haben wir den folgenden Spezialfall:

Es gilt $H^1(\mathbb{R}) \subset C^{0,1/2}(\mathbb{R})$ mit

$$\|u\|_\infty^2 \leq 2 \cdot (\|u\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^2})$$

$$|u(x) - u(y)| \leq \sqrt{x-y} \, \|\partial_x u\|_{L^2}$$

Da $C^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ dicht in $H^1(\mathbb{R})$ ist, genügt es, die Ungl. f. $u \in C^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ zu zeigen. Es gilt

$$u^2(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{d}{ds} u^2(s) \, ds = 2 \int_{-\infty}^{x} u(s) \, \partial_s u(s) \, ds$$

$$\overset{C.S.}{\leq} 2 \|u\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^2}$$

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_x^y \partial_s u(s) \, ds \right| \leq \int_x^y 1 \cdot |\partial_s u(s)| \, ds \leq \sqrt{x-y} \, \|\partial_x u\|_{L^2} \quad \blacksquare$$

Konsequenz:

- $\|u\|_\infty \le \|u\|_{L^2} + \|\partial_x u\|_{L^2} \qquad (*)$

$H^1(\mathbb{R})$ ist abgeschlossen unter der Multiplikation, denn

$$\|fg\|_{H^1}^2 = \int (\partial_x(fg))^2 + (fg)^2\, dx = \int (f_x g + f g_x)^2 + f^2 g^2\, dx$$

$$\le (\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2) \int f_x^2 + g_x^2 + f^2 + g^2\, dx$$

$$\overset{(*)}{\le} C(\|f\|_{H^1}^2 + \|g\|_{H^1}^2) < \infty$$

Beachte den Unterschied zu $L^2(\mathbb{R})$:

Sei $f(x) = \begin{cases} x^{-1/3} & ; 0<x<1 \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$

dann ist $f \in L^2$, aber

$$\int_0^1 (f^2)^2\, dx = \int_0^1 x^{-4/3}\, dx = \infty$$

also ist $f^2 \notin L^2$.

Allgemeiner gilt:

Sei $s > \frac{d}{2}$. Dann gilt f.a. $u, v \in H^s(\mathbb{R}^d)$, dass $u, v \in L^\infty$ und

$$\|uv\|_{H^s} \le C \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}$$

Eine weitere Verallgemeinerung zum Konzept der schwachen Ableitung sind distributionelle Ableitungen:

Dazu führen wir auf $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ folgenden Konvergenzbegriff ein:

$u_n \longrightarrow u$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ "=" $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ + Topologie (Raum + Konv. begriff)

$:\Longleftrightarrow$

$\exists K \subset \Omega$ mit K kompakt, sodass $\operatorname{supp}(u_n), \operatorname{supp}(u) \subset K$ und es gilt: $\lim_{n\to\infty} \partial_x^j u_n(x) = \partial_x^j u(x)$ glm. in K f.a. $j \in \mathbb{N}$.

Sei $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ die Menge aller stetigen linearen Fkt.-en von $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$, d.h.

$T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}) \Longleftrightarrow u_n \longrightarrow u$ in $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ impliziert $Tu_n \longrightarrow Tu$

$\Leftrightarrow \forall D$ beschränkt, offen $\exists c>0\ \exists m\in\mathbb{N}: |\Gamma(\Phi)| \leq c\,\|\Phi\|_{C^m_b}$

f.a. $\Phi \in C_0^\infty(D,\mathbb{R})$

Die Elemente in $\mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{R})$ heißen <u>Distributionen</u>. Für eine Fkt. u ist dann (sofern existent)

$$T_u(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\,\Phi(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

die zugehörige Distribution.

Für die zu ∂_x^m gehörende Distribution gilt:

$$T_{\partial_x^m u}(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_x^m u(x))\,\Phi(x)\,dx = (-1)^{|m|}\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\,(\partial_x^m \Phi(x))\,dx$$

$$= (-1)^{|m|}\,T_u(\partial_x^m \Phi)$$

Deswegen definieren wir:

Die Abb. $(\partial_x^m T)(\Phi) = (-1)^{|m|}\,T(\partial_x^m \Phi)$ heißt die m-te distributionelle Ableitung der Distribution T.

<u>Beispiel:</u>

$u(x) = |x|$

$$\forall \Phi \in C_0^\infty((-1,1)):\ T_u(\partial_x \Phi) = \int_{-1}^{0} -x\,\Phi_x\,dx + \int_0^1 x\,\Phi_x\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \Phi\,dx + \int_0^1 -\Phi\,dx = -T_g(\Phi)$$

mit $g(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$

Da $g \in L^2((-1,1))$ ist die distrib. Ableitung auch schwache Abl., also $u \in H^1(-1,1)$.

$$T_u(\partial_x^2 \Phi) = \int_{-1}^{0} \Phi_x\,dx + \int_0^1 -\Phi_x\,dx = 2\,\Phi(0) = 2\,\underbrace{\delta_0(\Phi)}_{\text{Dirac Distribution}},$$

wobei δ_0 die Dirac-Distribution zum Punkt $x=0$ ist.

Da es keine Fkt. h gibt, so dass

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,\Phi(x) = \Phi(0) \quad \text{f.a. } \Phi \in \mathcal{C}_0^\infty((-1,1))$$

ist $2\delta_0$ distr. 2-te-Ableitung von u, aber nicht schwach. Ableitung. Somit $u \notin H^2((-1,1))$. Denn angenommen: $\exists\, u \in L^p_{loc}$, so dass $\delta_0 = T_u$, dann gilt:

Für jedes $\Phi \in \mathcal{D}$ ist auch $\Psi(x) = x^2\,\Phi(x) \in \mathcal{D}$ und es ist

$$0 = \Psi(0) = \delta_0 \Psi = \int u(x)\, x^2\, \Phi^2(x)\, dx \qquad \text{f.a. } \Phi \in \mathcal{D}$$

$\Rightarrow u = 0$ f.ü.

$\Rightarrow \int u\,\Phi\, dx = 0 \neq \delta_0(\Phi)$ ↯

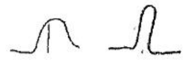
Dennoch wird häufig die Schreibweise $\int \delta_0(x)\,\Phi(x)\,dx = \varphi(0)$ benutzt. Dies kann mathematisch in dem Sinne interpretiert werden, dass dieser Ausdruck der Grenzwert von folgender Approximation ist:

Sei $u_k(x) = \left(\frac{k}{4\pi}\right)^{\underset{\text{Raumdim.}}{d/2}} \cdot e^{-k\|x\|_2^2/4}$. Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int u_k(x)\,\Phi(x)\,dx = \Phi(0) = \delta_0(\Phi)$$

[beachte $\int u_k(x)\,dx = \sqrt{k}\int u_k(\sqrt{k})\,dx = \int u_1(k) = 1$]

irgendwann mit Gaußfehlerintegral



Daher sei $\varepsilon > 0$ ex. $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$\Rightarrow \exists_{\delta>0} \quad |\Phi(x) - \Phi(0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad$ f.a. $\|x\| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \int u_k\,\Phi\, dx - \Phi(0) \right| = \left| \int \underbrace{u_k(x)(\Phi(x) - \Phi(0))}\, dx \right|$$

$$\leq \int_{\|x\|<\delta} \; dx + \int_{\|x\|>\delta} \; dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

In diesem Sinne gilt also:

$$u_k \xrightarrow{k\to\infty} \delta_0$$

1.2. FOURIERTRANSFORMATION

Def.: [Schwartzraum]

$\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial_x^\alpha f(x)| < \infty$ für jedes Paar von Multiindizes $(\alpha, \beta) \}$

$= \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1+|x|^m) \partial_x^\alpha f(x)| < \infty \; \forall m \in \mathbb{N}_0$ und jeden Multiindex $\alpha \}$

heißt Schwartzraum oder Raum der schnellfallenden Funktionen.

Bem.:

- Sei P ein Polynom. Dann ist $P \notin \mathcal{S}$, aber $f : x \mapsto P(x) e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$
- $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset \mathcal{S} \subset L^p$ für jedes $p \in [1, \infty]$

Def.: [Fouriertransformation]

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt $\hat{f}$ mit

euklidisches Skalarprodukt

$$\hat{f}(k) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} f(x) \, dx$$

f.a. $k \in \mathbb{R}^n$, die Fouriertransformierte von f. Der Operator $\mathcal{F} : f \longrightarrow \hat{f}$ heißt Fouriertransformation.

Bem.:

Leider ist die Normierung bei der Fouriertrafo. in der Literatur uneinheitlich. Alternative Normierungen sind

- $\hat{f}(k) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} f(x) \, dx$
- $\hat{f}(k) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi k \cdot x} f(x) \, dx$

atz 1.2.1: [Inverse Fouriertrafo.]

$\mathcal{F}$ ist eine lineare, bijektive Abbildung auf $\mathcal{S}$. Die <u>inverse Fouriertrafo.</u> ist gegeben durch:

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx}\, \hat{f}(k)\, dk.$$

ußerdem gilt:

i) $\mathcal{F}^2 f(x) = (2\pi)^{-n} f(-x)$

ii) $\mathcal{F}^4 \quad = (2\pi)^{-2n}\, \mathrm{Id}$

em.:

eachte die Analogien zu Fourierreihen. Sei z.B. $f \in \mathcal{C}^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$.
ann gilt:

$$f(x) = \underbrace{(2\pi)^{-1/2}}_{\text{Alternative Normierung}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{ikx}$$

(Inverse entspricht der Reihe)

m. auf $[-\pi,\pi]$, wobei

$$c_k = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

echenregeln für die Fouriertrafo:

tz 1.2.2:

i.) $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \hat{g}(y)\, dy$.

.) $\widehat{\partial_{x_j} f}(k) = i k_j\, \hat{f}(k)$ f.a. $j = 1,\dots,n$ und $k = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{R}^n$.

.) $\widehat{(x_j \cdot f)}(k) = i\,\partial_{k_j} \hat{f}(k)$ f.a. $j = 1,\dots,n$ und $x, k \in \mathbb{R}^n$.

) Für $f_a : x \longmapsto f(x+a)$ gilt:

$$\hat{f}_a(k) = e^{ik\cdot a}\, \hat{f}(k).$$

) Für jede bijektive lineare Abb. A auf $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\widehat{f \circ A} = |\det A|^{-1}\, \hat{f} \circ (A^{-1})^T.$$

) Sei $\varphi : x \longmapsto e^{-1/2 |x|^2}$. Dann ist:

$$\hat{\varphi}(k) = (2\pi)^{-n/2} \varphi(k) = (2\pi)^{-n/2} e^{-1/2 |k|}$$

Beweis:

"zu (1.)":

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot x} f(x)\, dx \right) g(y)\, dy$$

Fubini: Vertauschen der Integration

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left((2\pi^{-n}) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot x} g(y)\, dy \right) f(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx.$$

"zu (2.):"

Partielle Integration

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx}\, \partial_{x_j} f(x)\, dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} -\partial_{x_j} \left(e^{-ik\cdot x}\right) f(x)\, dx$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} ik_j\, e^{-ikx} f(x)\, dx = ik_j\, \hat{f}(k).$$

"zu (3.):" (Differentiation von Parameterintegralen
Parameter ist differentiation spielt keine [illegible])

Es gilt: $|\partial_{k_j} (e^{-ikx} f(x))| = |-ix_j e^{-ikx} f(x)| \leq |x_j f(x)|$ f.a. $k, x \in \mathbb{R}^n$.

Daher ist folgende Rechnung zulässig:

$$i\partial_{k_j} \hat{f}(k) = i\, \partial_{k_j} \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx \right) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} i\partial_{k_j} \left(e^{ik\cdot x} f(x)\right) dx$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} x_j e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx = \widehat{x_j f}(k).$$

"zu (4.)": (Substitution mit $z = x + a$)

Koord. trafo $z = x + a$

$$\hat{f}_a(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x+a)\, dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot(z-a)} f(z)\, dz$$

$$= e^{ik\cdot a}\, \hat{f}(k).$$

"zu (5.)": (Transformationssatz)

Transformationssatz

$$\widehat{f \circ A}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(Ax)\, dx = |\det A|^{-1} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot A^{-1}x} f(x)\, dx$$

$$= |\det A|^{-1} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(A^{-1})^T k\cdot x} f(x)\, dx$$

$$= |\det A|^{-1}\, \hat{f} \circ (A^{-1})^T.$$

zu 16.1: (Diffgl. anschauen, wegen Rechenregeln äquivalent, und dann Anfangswerte vergleichen)

n=1:

φ erfüllt die gewöhnliche Diff.-gl.

$$\partial_x \varphi(x) + x\,\varphi(x) = 0$$

$$\overset{(1),(3)}{\Longrightarrow} ik\,\hat\varphi(k) + i\partial_k \hat\varphi(k) = 0$$

wegen $\hat\varphi(0) = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(0)$

Gaußsch. Fehlerintegral

$\varphi, \hat\varphi$ erfüllen dieselbe gew. DGL. Aufgrund des Anfangswerts folgt:

$$\hat\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi.$$

n>1:

$$\hat\varphi(k) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\,dx = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\prod_{j=1}^n \big(e^{-ik_j x_j} e^{-\frac12 x_j^2}\big)\Big)\,dx$$

Fubini, Tonelli

$$= \prod_{j=1}^n \Big((2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{-ik_j\cdot x_j} e^{-\frac12 x_j^2}\,dx_j\Big) \overset{\text{Fall } n=1}{=} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big)^n \prod_{j=1}^n e^{-\frac12 k_j^2} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big)^n e^{-\frac12|k|^2}$$

Beweis (Satz 1.2.1):

1) Linearität von $\mathcal{F}$ ist klar. (Linearität von Integralen)

2) $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$

$$i\cdot\partial_{x_j}\hat f(k) \overset{(3)}{=} (-i)k_i\,\widehat{x_j\cdot f}(k) \overset{(2)}{=} -\widehat{\partial_{x_i}(x_j\cdot f)}(k)$$

Nach Vollst. Induktion folgt:

$$k^\beta\partial_k^\alpha\hat f = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\,\widehat{\partial_x^\beta(x^\alpha\cdot f)}$$

$$\Rightarrow |k^\beta\partial_k^\alpha\hat f(k)| \le (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{|e^{-ik\cdot x}|\,|(-i)|^{|\alpha|+|\beta|}}_{=1}\;\underbrace{|\partial_x^\beta(x^\alpha\cdot f)(x)|}_{\in\mathcal{S}\subset L^1}\,dx < \infty$$

$\Rightarrow \hat f \in \mathcal{S}$

3) $\mathcal{F}$ ist injektiv

Sei $\varphi(x) = e^{-\frac12|x|^2}$ und $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x}\hat f(k)\,dk = \varphi(0)\int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x}\hat f(k)\,dk = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x}\hat f(k)\,\varphi(\varepsilon k)\,dk \ominus$$

$$\overset{(3.)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f_x(k)\,(\varphi \circ \varepsilon\, Id)(k)\,dx}_{(4)} \overset{(4.)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f_x(k)\,(\varphi\circ\varepsilon Id)(k)\,dk$$

Transformations-satz

Fixpkt.

$$\overset{(5.)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f_x(k)\,\hat{\varphi}\left(\frac{k}{\varepsilon}\right) dk = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_x(\varepsilon k)\,\hat{\varphi}(k)\,dk$$

$$\overset{(6.)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(\varepsilon k + x)\,\varphi(k)\,dk = f(x)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(k)\,dk}_{=1}$$

$$= f(x) \qquad (*)$$

$$\mathcal{F}^2(f(x)) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x}\,\hat{f}(k)\,dk \overset{(*)}{=} (2\pi)^{-n} f(-x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^4 = (2\pi)^{-2n}\, Id$$

Außerdem gilt:

$\text{Bild}(\mathcal{F}) \supseteq \text{Bild}(\mathcal{F}^4) = \text{Bild}(Id) = \mathcal{S}$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ surjektiv

Formel für $\mathcal{F}^{-1}$ folgt aus $(*)$

Weitere Rechenregeln

<u>Satz 1.2.3:</u>

(1.) $\widehat{f\cdot g} = \hat{f} * \hat{g}$, Faltung

$\left[(\hat{f} * \hat{g})(k) := \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k-m)\,\hat{g}(m)\,dm \right]$

(2.) $\hat{f}\cdot\hat{g} = (2\pi)^{-n}\,\widehat{f*g}$

<u>Beweis:</u>

$\forall_{f,g\in\mathcal{S}} : f\cdot g \in \mathcal{S}$ (folgt unter Verwendung der Produktregel für die Ableitung und Definition von $\mathcal{S}$)

<u>"zu (1.)":</u>

$$\widehat{f\cdot g}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\,g(x)\,dx$$

$$= (2\pi)^{-n} \int e^{-ik\cdot x} f(x) \left(\int e^{ix\cdot y}\,\hat{g}(y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot(k-y)} f(x)\, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) \hat{f}(k-y)\, dy$$

$$= \hat{f} * \hat{g}(k)$$

„(2)":

$$\hat{f}\cdot\hat{g}(k) = (\mathcal{F}^2(\mathcal{F}^{-1}f))(k) \cdot (\mathcal{F}^2(\mathcal{F}^{-1}g))(k)$$

$$= (2\pi)^{-2n} (\mathcal{F}^{-1}f)(-k)(\mathcal{F}^{-1}g)(-k)$$

$$= (2\pi)^{-2n} (\mathcal{F}^{-1}f \cdot \mathcal{F}^{-1}g)(-k)$$

$$= (2\pi)^{-n} \mathcal{F}^2(\mathcal{F}^{-1}f \cdot \mathcal{F}^{-1}g)(k)$$

$$= (2\pi)^{-n} \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{F}^{-1}f \cdot \mathcal{F}^{-1}g})(k)$$

$$\overset{\text{Satz 1.2.3 (1.)}}{=} (2\pi)^{-n} \mathcal{F}(f * g)(k)$$

■

Satz 1.2.4: [Parseval, Plan]

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = (2\pi)^n \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2}$$

Insbesondere

- $\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2}$.
- $\mathcal{F}$ ist stetig bzgl. der L^2-Norm.

Beweis:

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} g(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} (2\pi)^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} g(y)\, dy \right) dk \right) dx$$

$$= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot k} f(x)\, dx \right)} \cdot \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot y} dy \right) dk$$

$$= (2\pi)^n \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2}.$$

■

Korollar 1.25:

$\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ lassen sich eindeutig als stetiges lineare Abb. auf L^2 fortsetzen.

Beweis:

Sei $u \in L^2$, wegen $C_0^\infty \subset \mathcal{S}$ ist $\mathcal{S}$ dicht in L^2

$\Rightarrow \exists \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}: \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2} = 0$

Wegen 1.24 gilt

$$\|\hat{u}_m - \hat{u}_n\|_{L^2} = \|\widehat{u_m - u_n}\|_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|u_m - u_n\|_{L^2} \quad \forall_{m,n\in\mathbb{N}}$$

$\Rightarrow (\hat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in L^2.

Sei $\hat{u} = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{u}_n$ bzgl. L^2-Norm. Dann def. $\mathcal{F}u := \hat{u}$. $\mathcal{F}u$ ist unabhängig von der konkreten Wahl von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und liefert die gewünschte Fortsetzung. $\mathcal{F}^{-1}$ setzt man analog fort.

Satz 1.2.6:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n): (\mathcal{F}f)(x) = \overset{\text{bzgl. } L^2}{\lim_{n\to\infty}} (2\pi)^{-n} \int_{B_n(0)} e^{-ix\cdot y} f(y)\, dy \qquad \text{f.ü. in } \mathbb{R}^n$$

Ist f zusätzlich in L^1, dann gilt:

$$(\mathcal{F}f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y} f(y)\, dy \qquad \text{f.ü. in } \mathbb{R}^n.$$

Bem.:

- Die Rechenregeln aus 1.2.2. und 1.2.4. gelten auch für alle $f \in L^2$ und deren schwache Ableitungen. (sofern diese existieren). [Beweis durch Approx. von L^2-Fkt:en durch Fkt.-en aus $\mathcal{S}$ und Limesbildung].
- In L^1 gelten:

(a) 1.2.2 (2)-(5)

(b) Falls $u, v, \hat{u}, \hat{v} \in L^1$, dann $u\cdot v \in L^1$ und es gilt 1.2.3 (1)

(c) Aus $u \in L^1$ folgt i.A. nicht $\hat{u} \in L^1$. $\mathcal{F}$ ist aber eine Bijektion auf dem Raum $L^1 \cap \mathcal{F}(L^1) \subset C^0$. In diesem Fall gilt die explizite Formel für $\mathcal{F}^{-1}$ aus Satz 1.2.1

Korollar 1.2.7:

$f \in H^m(\mathbb{R}^n) \iff k^\alpha \cdot \hat{f} \in L^2 \quad \forall_{|\alpha| \le m}.$

schwer nachzuweisen $\iff (1+|k|)^m \hat{f} \in L^2.$ einfach nachzuweisen

* Gut für den Nachweis, ob eine Fkt. im Sobolevraum ist, wenn sie „Fourierbar" ist. *

Beweisidee:

Direkte Anwendung der Rechenregeln aus 1.2.2 für die Ableitung und Anwendung von Parseval, Plancherel.

Konsequenz: Def. von H^m für bel. m.

Sei $\gamma(x) = (1+|x|^2)$, dann sei

$$L^2_m := \{ u \in L^2 : \|u\|_{L^2_m} := \| u \cdot \gamma^{m/2} \|_{L^2} < \infty \}.$$

$$H^m := \{ u \in L^2 : \hat{u} \in L^2_m \} \text{ mit Norm: } \|u\|_{H^m} = \|\hat{u}\|_{L^2_m}.$$

Für $m \in \mathbb{N}$ ist das identisch mit der bisherigen Def. von H^m.

Fouriertrafo für Distributionen:

Sei $T \in \mathcal{D}'$. Wir würden gerne definieren

$$\mathcal{F}T(\Phi) = T(\hat{\Phi}) \quad \forall_{\Phi \in \mathcal{D}}$$

gilt:

Paley-Wiener-Theorem

$\operatorname{supp} \hat{\Phi}$ kompakt $\iff \Phi$ analytisch

Identitätssatz für Potenzreihen $\Rightarrow \operatorname{supp} \Phi$ nicht kompakt oder $\Phi \equiv 0$

Daher hat $\hat{\Phi}$ keinen komp. Träger außer $\hat{\Phi} = 0$. Daher macht $T(\hat{\Phi})$ so keinen Sinn.

23.04.1

Zur Def. der Fouriertransformation schränken wir den Raum $\mathcal{D}'$ der Distributionen auf den Teilraum $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ der sogenannten temperierten Distributionen. Zur Def. von $\mathcal{S}'$ führen wir den folgenden Konvergenzbegriff auf $\mathcal{S}$ ein:

$$\Phi_k \longrightarrow \Phi \text{ in } \mathcal{S} :\iff \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}^n} \; x^\alpha \partial_x^\beta \Phi_k(x) \longrightarrow x^\alpha \partial_x^\beta \Phi(x) \text{ glm. auf } \mathbb{R}^n.$$

$\mathcal{S}'$ ist dann der Dualraum von $\mathcal{S}$, also der Raum aller stetigen linearen Funktionen $\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ bzgl. des eben definierten Konvergenzbegriffes.

Äquivalente Charakterisierung:

$T \in \mathcal{S}' \Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{N},\, \beta \in \mathbb{R}^n,\, C > 0:$

$$|T(\Phi)| \leq C\, p_{\beta,m}(\Phi) \quad \text{f.a. } \Phi \in \mathcal{S}$$

mit $p_{\beta,m}(\Phi) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial_x^{\beta} \Phi(x)\,(1 + \|x\|)^m| < \infty$

(Familie von Halbnormen, die die Topologie auf $\mathcal{S}$ induzieren, zu der die obigen Konvergenzbegriff gehört).

<u>Beispiel:</u>

$u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ mit $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| =: C_n < \infty$, kann als temperierte Distribution interpretiert werden gemäß

$$T_u(\Phi) = \int u \Phi \, dx \quad \text{, wegen}$$

$$|T_u(\Phi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)\, \Phi(x)|\, dx \leq C_n \int_{\mathbb{R}} |\underbrace{\Phi(x)}_{\in \mathcal{S}}|\, dx$$

$$\leq C_n \int (1 + x^2)^{-1}\, dx = c_n\, p_{0,2}(\Phi)$$

Außerdem ist für $u \in L^1_{loc}$ unter der Voraussetzung, dass ein $N \in \mathbb{N}$ ex. mit

$\int |u(x)|(1 + \|x\|)^{-N}\, dx < \infty$ oder für $u \in L^p$, mit $p \geq 1$ durch

$T_u(\Phi) = \int u \Phi\, dx$ eine temperierte Distribution definiert.

Da $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{S}$ ist, ist allerdings $\mathcal{S}' \subsetneq \mathcal{D}'$, zum Beispiel:

$u(x) = e^{\alpha |x|}$, $\alpha > 0 \Rightarrow T_u \in \mathcal{D}' \setminus \mathcal{S}'$

□

<u>Def.:</u>

Die Fouriertrafo. $\mathcal{F}$ ist für alle temp. Distributionen T definiert durch:

$$(\mathcal{F}T)(\Phi) = T(\mathcal{F}\Phi) \quad \text{f.a. } \Phi \in \mathcal{S}.$$

Bem.: Jedes $u \in \mathcal{S}$ besitzt eine assoziierte temp. Distribution T_u und es ist

$$(\mathcal{F}T_u)(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}u)(x)\, \Phi(x)\, dx.$$

<u>Beispiel:</u>

(a) $u(x) = e^{ikx} \Rightarrow (\mathcal{F}T_u)(\Phi) = \int e^{ik\xi}\, \Phi(\xi)\, d\xi = \hat{\Phi}(k)$

$$\Rightarrow \mathcal{F}Tu = \delta_k$$

Wir können hier Fourier trafo für Raud. Fkt. durchführen

$$u_0(x) = 1 \Rightarrow \mathcal{F}Tu_0 = \delta_0$$

(b) $u(x) = x^\alpha \Rightarrow \mathcal{F}Tu = (i)^{|\alpha|} \partial_k^\alpha \delta_0$

$$\hat{x}^\alpha = (i)^{|\alpha|} \partial_k^\alpha \delta_0$$