2. Zeitabhängige lineare PDG - Phänomene

[redacted]

[redacted]

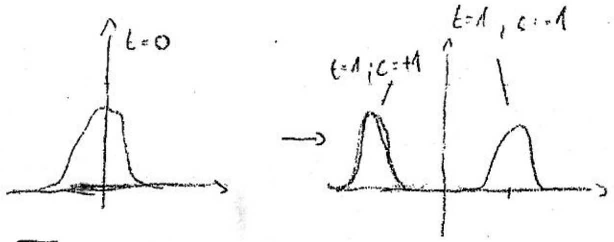
2.1. Transport

$\partial_t u = c\partial_x u \qquad x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$

$u(x,0) = u_0(x)$

Die eindeutige Lösung ist:

$u(x,t) = u_0(x+ct)$ (definiert f.a. $t \in \mathbb{R}$)



Sei $y := x+ct$; $\tilde{u}(y,t) = u(y-ct,t)$

$\Rightarrow \partial_t \tilde{u} = -c\,\partial_x u + \partial_t u = 0$

$\Rightarrow \tilde{u}(y,t) = \tilde{u}(y,0) = u_0(y)$

$\Rightarrow u(x,t) = u_0(x+ct)$

Konsequenzen:

- endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit
  (u_0 hat komp. Träger $\Rightarrow u(\cdot,t)$ hat komp. Träger)
- Regularität bleibt zeitlich unverändert, z.B. $u_0 \in \mathcal{C}^k \Leftrightarrow u \in \mathcal{C}^k$
  $u_0 \in H^m \Leftrightarrow u(t) \in H^m$

Sei $u_0 \in \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$

$\Rightarrow u \in \mathcal{C}^0_b(\underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{x}{\mathbb{R}})$

Aber es gilt i.A. nicht, dass $u \in \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}, \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}))$

z.B. $u_0(x) = \sin(x^2)$

$\|u(t)-u_0\|_{\mathcal{C}^0_b} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)-u_0(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_0(x+ct)-u_0(x)| = 2 \neq 0$ für $t \to 0$

Lemma 2.1.1:
Sei $u_0 \in \mathcal{C}^0_{b,\text{unif}}(\mathbb{R})$, u Lsg. der Transportgleichung mit $u(0)=u_0$. Dann ist die Kurve $t \mapsto u(t)$ stetig in $\mathcal{C}^0_{b,\text{unif.}}(\mathbb{R})$

Beweis:

Es genügt (wegen der Translationseigenschaft) die Stetigkeit bei $t=0$ nachzuweisen, d.h.

z.z. $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0} : |t|<\delta \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_0(x+ct)-u_0(x)|<\varepsilon$.

Aber das ist offensichtlich äquivalent zur glm. Stetigkeit von u_0 auf $\mathbb{R}$.

2.2. Diffusion

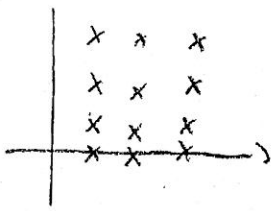
$$\partial_t u = \partial_x^2 u \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

2.2.1. Motivation:

Betrachte ein 2-dim. rechtwinkliges Gitter :=

$$\{(m\delta x, n\delta t) : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ;\ n = 0,1,2,\dots\}$$



Ein Teilchen startet zur Zeit $t=0$ bei $x=0$. In jedem Zeitschritt $t \to t+1$ bewegt sich das Teilchen mit W.-keit $\frac{1}{2}$ nach links und mit W.-keit $\frac{1}{2}$ nach rechts. Sei $p(m,n)$ die W.-keit, dass das Teilchen zur Zeit $n\delta t$ bei $m\delta x$ ist. Dann gilt

$$p(0,0) = 1 \ , \quad p(m,0) = 0 \quad \text{f.a. } m \neq 0$$

$$p(m,n+1) = \frac{1}{2}\left(p(m-1,n) + p(m+1,n)\right)$$

bzw.

$$p(m,n+1) - p(m,n) = \frac{1}{2}\left(p(m-1,n) - 2p(m,n) + p(m+1,n)\right)$$

Unter der Annahme, dass $(\delta x)^2/(\delta t) = 2D$ ist

$$\frac{1}{\delta t}\cdot p(m,n+1) - p(m,n) = \frac{D}{(\delta x)^2}\left(p(m-1,n) - 2p(n,m) + p(m+1,n)\right)$$

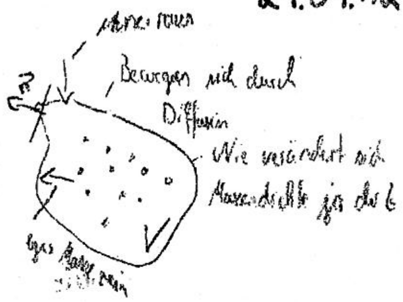
Im Grenzübergang $\delta \longrightarrow 0$ erhält man formal

$$\partial_t p = D\partial_x^2 p$$

24.04.12

2.2. Motivation:

Sei $\varrho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine (stetige) Massendichte und $V \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Dann gilt:



$$\frac{d}{dt}\int \varrho \, dV = -\int j\cdot\vec n \, dS \overset{\text{Gauß}}{=} -\int \operatorname{div}(j)\, dV \qquad (*)$$

wobei $j \in \mathbb{R}^n$ der Massenfluß ist.

Da (*) für alle Testvolumen V gelten soll (Physikalisch bedeutet das, dass wir Massenerhaltung haben), folgt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, dass

Annahme von physikalischen Eigenschaften

$$\frac{d}{dt}\varrho = -\operatorname{div} j.$$

Unter der Annahme, dass $j = -D\nabla\varrho$ ist (also Fluß proportional zum negativen Massengradienten), dann folgt

$$\partial_t \varrho = D\Delta\varrho.$$

Lösung des Anfangswertproblems für die Diffusionsgleichung mit Hilfe der Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \partial_x^2 u \quad \xrightarrow{\text{Fouriertrafo.}} \quad \partial_t \hat{u}(k,t) = -k^2 \hat{u}(k,t) \\ u(x,0) &= u_0(x) \qquad\qquad\qquad \hat{u}(k,0) = \hat{u}_0(k) \\ x &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

macht das ganze nur kleiner

$$\Rightarrow \hat{u}(k,t) = e^{-k^2 t}\,\hat{u}_0(k)$$

$$\Rightarrow \underset{\text{Faltung}}{\underline{u(x,t)}} = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k^2 t}\,\hat{u}_0(k)\right) \quad \text{Satz 1.2.2 Regel (6)}$$

$$= \left(\mathcal{F}^{-1} e^{-k^2 t} * u_0\right)(x) \quad \text{- durch Substitution}$$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t}\, u_0(y)\,dy}. \qquad (**)$$

Ist $u_0(y) = \delta_0$, dann erhalten wir

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/4t}$$

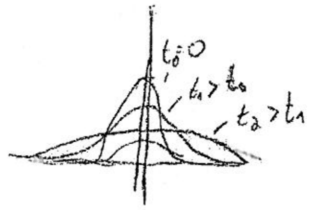
(Standartgrundlösung der Diffusionsgleichung)

und für $u_0(y) = \delta_y$ - bestimmter Pkt

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-(x-y)^2/4t}.$$

Dieses Verfahren liefert eine Lösung. Zur Eindeutigkeit folgen später Bemerkungen.

Konsequenzen aus der Lösungsdarstellung (**):



(1.) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,0)|\, dx$

Abklingfaktor

Abklingrate von $t^{-1/2}$

2.) Massenerhaltung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t}\, dx}_{=1} \Bigg) u(y,0)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, dx$$

Andere Herleitung:

$$\partial_t u = \partial_x^2 u$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} u\, dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_t u\, dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u\, dx = \partial_x u(+\infty) - \partial_x u(-\infty)$$

$$= 0$$

als Wahrscheinlichkeit gesehen

in den anwendungsrelevanten Räumen [z. B. bei endlicher Masse].

.) Die Diffusionsgleichung kann i. A. nicht rückwärts bis $-\infty$ gelöst werden. (folgt aus (a)).

.) Unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.
u_0 hat komp. Träger und $u_0 > 0 \Rightarrow \forall_{t>0} \forall_{x\in\mathbb{R}} : u(x,t) > 0$.

.) Glättendes Verhalten:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\partial_x u(x,t)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{(x-y)}{2t} e^{-(x-y)^2/4t}\, u(y,0)\, dy \right|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{s}{\sqrt{t}} e^{-s^2}\, u(x-2\sqrt{t}s, 0)\, ds \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s e^{-s^2}\, ds \right) \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,0)| \right)$$

$$\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \sup |u(x,0)|$$

wobei C unabhängig von t ist.

Allgemein gilt:

<u>Satz 2.2.1:</u>

Sei $u = u(t)$ eine Lösung der Diffusionsgleichung.

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{C>0}\ \forall_{t>0} : \|\partial_x^n u(t)\|_{\mathcal{C}_b^0} \leq C t^{-n/2} \|u(0)\|_{\mathcal{C}_b^0} .$$

(6.) <u>Lemma 2.2.2:</u>

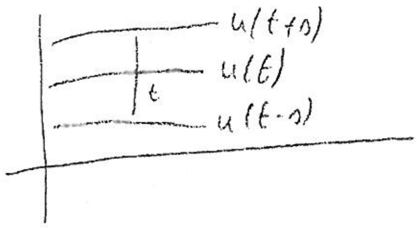
Sei $u = u(t)$ Lösung der Diffusionsgleichung mit $u_0 \in \mathcal{C}^0_{b,\text{unif}}$. Dann ist

$t \longmapsto u(t,\cdot) \in \mathcal{C}([0,\infty), \mathcal{C}^0_{b,\text{unif}})$

<u>Beweis:</u>

Lösung $u(t+s)$ zum Anfangswert u_0 stimmt mit Lösungen $u(t)$ zum Anfangswert $u(s)$, wobei $u(s)$ Lösung zum AW u_0 ist, überein.

Kurzschreibweise: $u(t+s, u_0) = u(t, u(s, u_0))$.



Deshalb genügt es, die Stetigkeit für $t=0$ zu zeigen. Mit der Bezeichnung

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-z^2/4}$$

betrachten wir:

$$\|u(t,u_0) - u_0\|_{\mathcal{C}_b^0} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t) - u(x,0)|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{t}} H\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right) (u(y,0) - u(x,0))\, dy \right|$$

Substitution

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \underbrace{H(z)\,(u(x-\sqrt{t}z, 0) - u(x,0))}_{:=\ldots}\, dz \right|$$

$$\leq \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{|z|\leq R} |\ldots|\, dz}_{:=\Delta_1} + \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{|z|\geq R} |\ldots|\, dz}_{:=\Delta_2}$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{t_0>0}\ \forall_{t\in(0,t_0)} : \Delta_2 \leq 2\int_{|z|\geq R} H(z)\, dz \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für hinreichend großes R (wegen exponentiellen Abfall von H).

Großen Werte expol. Abfallen
Kleine Werte die glm. Stetigkeit von U_0 ausnutzen.

$$s_1 \le \underbrace{\left(\int_{|z|\le R} H(z)\, dz \right)}_{\le 1} \left(\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ |z|\le R}} |u(x+\sqrt{t}z,0) - u(x,0)| \right)$$

Da u_0 glm. stetig ist $\exists \delta>0\ \forall y\in\mathbb{R}$ mit $|y|<\delta$:

$$|u(x+y,0) - u(x,0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wähle $t_0>0$ so klein, dass $\sqrt{t_0}R<\delta$. Dann ergibt sich die Behauptung. ∎

<u>Bemerkung:</u>

Ersetzen wir $C^0_{b,unif}$ durch C^0_b, dann gilt im Allgemeinen keine Zeitstetigkeit.

Gegenbeispiel: $u_0(x) = \sin(x^2)$

Nl. p. Dgln.
©
24.04.12

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_0 > 0 \ \forall t \in (0, t_0)$:

$$\cdot \ s_2 \le 2 \int_{|z| \ge R} H(z)\, dz \ \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x,0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für hinr. großes } R \ (\text{wg. exp. Abfall von } H)$$

$$\cdot \ s_1 \le \underbrace{\left(\int_{|z| \le R} H(z)\, dz \right)}_{\le 1} \left(\sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ |z| \le R}} |u(x + \sqrt{t}\, z, 0) - u(x, 0)| \right).$$

Da u_0 glm. stetig ist, $\exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < \delta$:

$$|u(x+y, 0) - u(x, 0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wähle t_0 so klein, dass $\sqrt{t_0} R < \delta$.
Dann ergibt sich die Behauptung. ■

Bemerkung:
Ersetzen wir $\ell^\infty_{\text{unif}}$ durch ℓ^∞, dann gilt i.A. keine Zeitstetigkeit.
Gegenbeispiel: $u_0(x) = \sin(x^2)$. ■

7) Selbstähnliches Verhalten zu führender Ordnung:
Es gilt
$$u(x,t) = \frac{A^*}{\sqrt{t}}\, v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \sigma(t^{-1})$$
mit $\cdot \ A^* \in \mathbb{R}$ (hängt von u_0 ab) und
$$\cdot \ v(\xi) = e^{-\xi^2/4}.$$

Alternative Herleitung der exakten selbstähnlichen Lsg.
$$\tilde{u}(x,t) = \frac{A^*}{\sqrt{t}} \cdot v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$ ●

Einsetzen ~~...~~ in $\partial_t u = \partial_x^2 u$ liefert
des Ansatzes

$$\partial_\xi^2 \tilde v = -\frac{1}{2}\xi \cdot \partial_\xi \tilde v \qquad \tilde u(x,t) = \tilde v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

mit

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow \partial_\xi \tilde v = c \cdot e^{-\xi^2/4}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \partial_x \tilde u = \frac{x}{\sqrt{t}} (\partial_\xi \tilde v)\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$\Rightarrow \tilde u(x,t) = \frac{\tilde c}{\sqrt{t}} \cdot e^{-x^2/4t}$$

$$\Rightarrow \tilde{\tilde u}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$ ist ebenfalls Lsg. der Diffusionsgleichung (Translationsinvarianz)

$$\Rightarrow \tilde{\tilde{\tilde u}}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(y)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \, dy .$$

Wegen Lemma 2.2.2 erhalten wir für $t \to 0$

$$c(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} u(y,0) .$$

Damit haben wir die Lösungsformel wiedergefunden (für $u_0 \in C^0_{b,\text{unif.}}$).

3) Abklingverhalten in Sobolevräumen:

Lemma 2.2.3

Sei u Lsg. der Diffusionsgleichung zum AW $u_0 \in H^1$. Dann gilt

$$\| u(t) \|_{L^2} \le \| u_0 \|_{L^2} .$$

Nl. p. Dgln
③
24.04.12

Beweis:

Da C_0^∞ dicht in H^1 liegt, genügt es, $u \in C_0^\infty$ zu betrachten.
Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^2\,dx &= 2\int_{\mathbb{R}} u\,\partial_t u\,dx \\
&\overset{\substack{\text{Diffusionsgleichung} \\ \partial_t u = \partial_x^2 u}}{=} 2\int_{\mathbb{R}} u\,\partial_x^2 u\,dx \\
&\overset{!}{=} -2\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2\,dx \\
&\leq 0.
\end{aligned}
$$

Lemma 2.24:

Sei $u(t) \in H^{m_2}$ Lsg. d. Diffusionsgleichung.
Dann gilt

$$\|u(t)\|_{H^{m_2}} \leq C \cdot t^{-\left(\frac{m_2-m_1}{2}\right)} \cdot \|\hat{u}_0\|_{H^{m_1}}.$$

Beweis:

Sei

$$\hat{u}(k,t) = \hat{M}(k,t)\,\hat{u}(k,0) \quad \text{mit} \quad \hat{M}(k,t) = e^{-k^2 t}.$$

Sei $\hat{\rho}(k) = \sqrt{1+k^2}$.

Dann gilt: $\qquad // \ \|u_0\|_{H^m} \overset{!}{=} \|\hat{\rho}^m \hat{u}_0\|_{L^2}$

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{H^{m_2}} &\overset{!}{\leq} \|\hat{\rho}^{m_2}\hat{u}\|_{L^2} \\
&\overset{!}{\leq} C \cdot \|\hat{M}\hat{\rho}^{m_2}\hat{u}_0\|_{L^2} \\
&\leq C \cdot \|\hat{M}\hat{\rho}^{m_2-m_1}\hat{\rho}^{m_1}\hat{u}_0\|_{L^2} \\
&\leq C \cdot \|\hat{M}\hat{\rho}^{m_2-m_1}\|_{C_b^0} \cdot \|\hat{\rho}^{m_1}\hat{u}_0\|_{L^2} \\
&\leq C \cdot \underbrace{\|\hat{M}\hat{\rho}^{m_2-m_1}\|_{C_b^0}}_{\overset{!}{=} \sup_{k\in\mathbb{R}} (1+k^2)^{\frac{m_2-m_1}{2}} \cdot e^{-k^2 t}} \cdot \|\hat{u}_0\|_{H^{m_1}}
\end{aligned}
$$

$$\leq C \cdot t^{-\left(\frac{m_2 - m_1}{2}\right)} \|\mathring{u}\|_{H^{m_1}} .$$

Def.:

Ein Operator $M : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ heißt Multiplikator, falls es eine reellwertige (oder komplexe-) Fkt. $\hat{M}$ gibt, so dass

$$\forall u \in \mathcal{S}' : \mathcal{F}(Mu)(k) = \hat{M}(k)\hat{u}(k) ,$$

d.h.

$$\forall \phi \in \mathcal{S} : \mathcal{F}(Mu)[\phi] = u(\hat{M}(\mathcal{F}\phi)) .$$

2.3 Dispersion

Prototyp für Dispersion ist die Schrödingergleichung

$$\partial_t u = -i \, \partial_x^2 u .$$

Suche zunächst nach Lsgen der Form

$$u(x,t) = e^{ikx + \lambda t} .$$

Einsetzen in die Slg. (Schrödingergleichung) liefert $\quad // \partial_t u = -i\partial_x^2 u \Leftrightarrow \lambda \cdot \underbrace{e^{ikx+\lambda t}}_{=u} = \underbrace{-i \cdot i}_{=+1} k \cdot \partial_x u$

$$\lambda = ik^2 . \qquad \Leftrightarrow \lambda \cdot u = k \cdot ik \cdot \underbrace{e^{ikx+\lambda t}}_{=u} \Leftrightarrow \lambda u = ik^2 u$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda = ik^2}}$$

Also

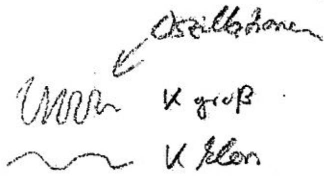
$$u(x,t) = e^{ikx + ik^2 t}$$

$$= e^{ik(x+kt)} .$$

Zum Vergleich: Einsetzen desselben Ansatzes in die Diffusionsgleichung liefert

$$\lambda = -k^2 \longrightarrow \underbrace{\underbrace{e^{-k^2 t}}_{\text{Dämpfung}} e^{ikx}}_{=u(x,t)} .$$

ohne i



Nl. p. Dgln
(+)
24.04.12

Bei der Slg dagegen haben wir folgendes Phänomen:
Wellen der Form $\sin(kx - \omega(k)t)$ schreiten mit versch. Phasengeschwindigkeiten

$$c(k) = \frac{\omega(k)}{k}$$

fort. $\rightarrow$ Dispersion.

Lemma 2.3.1:

Die Lsg zu $\begin{cases} \partial_t u = -i\partial_x^2 u & // \text{S gl.} \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$

ist

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\,dx,$$

sofern dieses Integral existiert.
Dies ist z.B. der Fall für $u_0 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ und lässt sich als Isometrie fortsetzen auf L^2 wegen $\|u(\cdot,t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$

Beweis:

$\partial_t \hat{u} = ik^2 \hat{u}$

$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi} g(\cdot,t) * u_0(\cdot)(x)$

mit $\hat{g}(k,t) = e^{ik^2 t}$.

Da

$$e^{ik^2 t} e^{ikx} \notin L^1,$$

muss das obige Integral als Riemannintegral berechnet werden. Es existiert wegen (liegt an schneller Oszillation)

$$\partial_x g(x,t) = \int ik e^{ik^2 t}\,dk = -\frac{ix}{2t} g(x)$$

$$\Rightarrow \quad g(x,t) = C \cdot e^{-\frac{i x^2}{4t}} \quad \text{mit} \quad C = \hat{g}(0,t) = \int e^{i k^2 t}\, dk$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot e^{i \pi/4} = -\sqrt{\frac{\pi}{it}}\,.$$

Wegen $\mathcal{F}^{-1}\hat{g}\hat{u}_0 = \frac{1}{2\pi}\, g * u_0$

folgt $(*)^2$, was Sinn macht für $u_0 \in L^1$.

Für $u_0 \in L^1 \cap L^2$ gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{-i 4\pi t}} \cdot e^{-\frac{i x^2}{4t}} \cdot \int e^{-\frac{i x y}{2t}} \cdot e^{-\frac{i y^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-i 4\pi t}} \cdot e^{-\frac{i x^2}{4t}}\, 2\pi\, \underbrace{\hat{h}\left(\frac{x}{2t}\right)}_{= e^{-\frac{i \frac{x^2}{4t^2}}{4t}} \cdot u_0\left(\frac{x}{2t}\right)}$$

mit

$$h(y) = e^{-\frac{i y^2}{4t}}\, u_0(y)\,.$$

Wegen

$$\|\hat{h}\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \|h\|_{L^2}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \|g\|_{L^2}$$

folgt

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = (2\pi)^2 \int \left|\frac{1}{\sqrt{-i 4\pi t}}\, e^{-\frac{i x^2}{4t}}\right|^2 \cdot \left|\hat{h}\left(\frac{x}{2t}\right)\right|^2 dx$$

$$= 2\pi \int |\hat{h}(z)|^2\, dz$$

$$= \|h\|_{L^2}^2$$

$$= \|u_0\|_{L^2}^2\,.$$

Somit lässt sich $(*)$ isometrisch auf L^2 fortsetzen.

Nach dem Beweis gilt 30.04.12

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Erhaltung in } L^2}}{\|u(\cdot,t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}} \qquad (\mathrm{I}).$$

Ml. p. Dgln.
(1)
30.04.12

Bemerkung:

Alternative Herleitung von (I) mit Fouriertrafo.:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = 2\pi \, \|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^2}^2$$

$$= 2\pi \int |e^{ik^2t} \, \hat{u}_0(k)|^2 \, dk$$

$$\|u_0\|_{L^2}^2 = 2\pi \, \|\hat{u}_0\|_{L^2}^2 \leftarrow = 2\pi \int |e^{ik^2t} \, \hat{u}_0(k)|^2 \, dk$$

Eigenschaften der Lösung der Schrödingergleichung:

1) $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)| \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,0)| \, dx.$

2) $\partial_x u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2i(x-y)}{4t} e^{-\frac{i(x-y)^2}{4t}} \cdot u(y,0) \, dy.$

Gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| |u(y,0)| \, dy < \infty,$$

dann ist $\forall t>0 \; \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_x u(x,t) < \infty,$$

unabh. davon, ob u_0 diff'bar ist.

Allgemeiner gilt:

Ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y|^m |u(y,0)| \, dy < \infty,$$

dann ist $\forall t>0 \; \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_x^m u(x,t) < \infty.$$

3) $t \mapsto u(\cdot,t)$ ist stetig von $\mathbb{R}_0^+$ nach $L^2(\mathbb{R})$ und es gilt

$$u(t+s,\cdot)[u_0] = u(t,\cdot)[u(s,\cdot)[u_0]].$$

Denn:

$$\|u(t)-u_0\|_{L^2}^2 = 2\pi \cdot \|\hat{u}(t)-\hat{u}_0\|_{L^2}^2$$

$$= 2\pi \cdot \int |\hat{u}_0|^2 \, |1-e^{-ik^2t}|^2 \, dk$$

$$= 2\pi \Big(\int_{|k|<L} |\hat{u}_0|^2 \, |1-e^{-ik^2t}|^2 \, dk \; +$$

$$\int_{|k|\geq L} |\hat{u}_0|^2 \, |1-e^{-ik^2t}|^2 \, dk \Big).$$

Wegen $u_0 \in L^2$ ex. ein hinr. großes L, so dass das zweite Integral $< \frac{1}{4\pi}\varepsilon^2$ ist.

Da $|1-e^{-ik^2t}| \xrightarrow{t\to 0} 0$ glm. auf beschränkten k-Intervallen gilt, ist für hinr. kleine t auch das erste Integral $< \frac{1}{4\pi}\varepsilon^2$.

Also $\forall u_0 \in X \;\; \forall \varepsilon>0 \;\; \exists t_0>0 \;\; \forall |t|<t_0$:

$$\|u(t)-u_0\|_{L^2}^2 < \varepsilon^2.$$

Etwas Heuristik zur Dispersion:

Betrachte Anfangswerte der Form

$$u_0(x) = U_0(\varepsilon x) e^{ikx},$$

wobei $0<\varepsilon \ll 1$ und U_0 hinr. räuml. lokalisiert ist.

Nl. p. Dgln
2
20.04.12

Es ist

$$// \; i\partial_x^2(u_0(\varepsilon x)e^{ikx}) = i\partial_x\left(\varepsilon u_0'(\varepsilon x)e^{ikx} + u_0(\varepsilon x)ike^{ikx}\right)$$
$$= i\cdot\left(\varepsilon^2 u_0''(\varepsilon x)e^{ikx} + \varepsilon u_0'(\varepsilon x)ike^{ikx} + \varepsilon u_0'(\varepsilon x)ike^{ikx} + u_0(\varepsilon x)i^2k^2e^{ikx}\right)$$

(0)

$$i\partial_x^2\left(u_0(\varepsilon x)e^{ikx}\right) = ie^{ikx}\left(-k^2u_0(\varepsilon x) + 2\varepsilon ik\, u_0'(\varepsilon x) + \varepsilon^2 u_0''(\varepsilon x)\right)$$

Machen wir ~~den~~ das Ansatz

$$u(x,t) = B(\varepsilon(x-c_g t), \varepsilon^2 t)\, e^{ik(x-c_p t)}$$

mit $c_p, c_g \in \mathbb{R}$.

Setzt man diesen Ansatz in die Schrödingergleichung ein, verwendet (0) und setzt alle Terme mit gleicher ε-Potenz gleich, dann erhält man für die Ordnung

ε^0: $-ikc_p = -ik^2 \Rightarrow c_p = k$

ε^1: $-c_g\partial_\xi B = -2k\partial_\xi B \Rightarrow c_g = 2k$

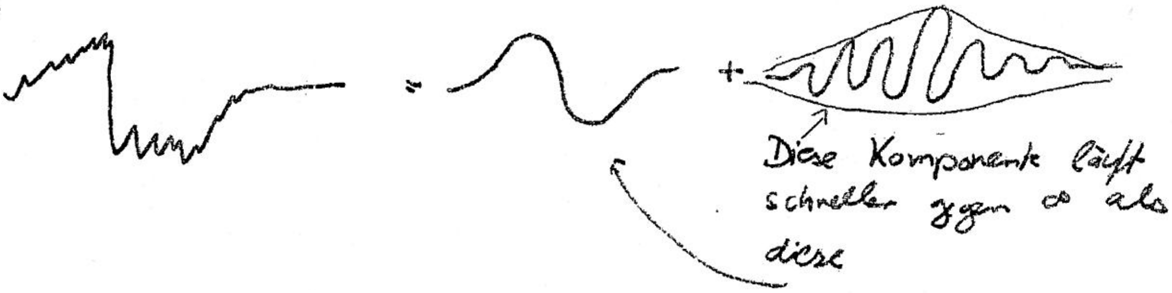
ε^2: $\partial_\tau B = i\partial_\xi^2 B$,

wobei
- $\xi = \varepsilon(x - c_g t)$
- $\tau = \varepsilon^2 t$.

$c_p = k = \frac{\omega(k)}{k}$, wobei $\omega(k) = k^2$, heißt Phasengeschwindigkeit,

$c_g = 2k = \omega'(k)$ heißt Gruppengeschwindigkeit.

AW:



$\Rightarrow$ lokale Glättung.

Da die weniger glatten Anteile lokalisiert sind, kommen auch keine weniger glatten Anteile aus dem Unendlichen.

Sind die weniger glatten Anteile nicht lokalisiert, kann weniger Glattes aus dem Unendl. kommen → keine Glättung

→ Der Raum $\ell^0_{\infty,\mathrm{unif}}(\mathbb{R})$ ist nicht gut geeignet als Lösungsraum für die SG.

Bemerkung:

Setzt man den Ansatz

$$u(x,t) = e^{ikx+\lambda t}$$

in die Transportgleichung

$$\partial_t u = c\partial_x u$$

ein, erhält man

$$u(x,t) = e^{i(kx-\omega(k)t)}$$

mit

$$\omega(k) = ck$$

$$\Rightarrow \quad c_p = c, \quad c_g = c$$

→ alle Komponenten (bzgl. k) werden gleich schnell transportiert

→ Transportgl. ist Regularitätserhaltend.

$$\partial_t u = c\partial_x^n u$$

$$\Rightarrow \partial_t \hat{u} = c(ik)^n \hat{u}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = c(ik)^n$$

Nl. p. Dgln
(3)

30.04.12

2.4 Wellenausbreitung

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u \\ u|_{t=0} = u_0, \; \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{cases}$$ Wellengleichung

mit $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

Lsgsformel:

Die Lsgen der Wellengleichung lassen sich darstellen in der Form

$$u(x,t) = F(x+ct) + g(x-ct).$$

Das bedeutet, für ggb. AW u_0, u_1 folgt im Fall $c=1$:

$$u_0(x) = F(x) + g(x)$$
$$u_1(x) = F'(x) - g'(x)$$

$$\Rightarrow u_0'(x) = F'(x) + g'(x) \qquad // F'(x) = u_0'(x) - g'(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'(x) = \frac{1}{2}(u_0'(x) + u_1(x)) \\ g'(x) = \frac{1}{2}(u_0'(x) - u_1(x)) \\ u_0(0) = F(0) + g(0). \end{cases}$$

Integration liefert:

$$F(x) + g(x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x) + \int_0^x u_1(y)\,dy\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(u_0(x) - \int_0^x u_1(y)\,dy\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)\,dy.$$

Einsetzen dieser Darstellungsformel in die Wellengleichung liefert, dass diese Fkt. u tatsächlich die Wellengleichung löst (falls u_0, u_1 hinreichend regulär sind).
Das bedeutet, dass die Wellenausbreitung ein gleichzeitiger Transport nach rechts und nach links ist.
Grund:

$$\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0.$$

Zwei Transportgleichungen

Bemerkung:
Die Eindeutigkeit der Lsg. in geeigneten Sobolevräumen bekommt man mit Hilfe der folgenden Energiegleichung:

$$\partial_t^2 u = c^2\partial_x^2 u \quad \Big|\cdot \partial_t u \,,\ \int \dots dx$$

$$\Rightarrow \int \partial_t u\, \partial_t^2 u\, dx = c^2 \int \partial_x^2 u\, \partial_t u\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int (\partial_t u)^2 dx = -c^2 \int \partial_x u\, \partial_{xt} u\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int (\partial_t u)^2 + c^2(\partial_x u)^2\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int (\partial_t u)^2 + c^2 \int (\partial_x u)^2\, dx \overset{!}{=} \int (\partial_t u)^2\big|_{t=0} + c^2(\partial_x u)^2\big|_{t=0}\, dx$$

$$\overset{!}{=} \int u_1^2 + c^2(\partial_x u_0)^2\, dx$$

(Energieerhaltung).