N. p. Dglen ① 07.05.12

3. Die Burgersgleichung

Die Gleichung

$$\partial_t u = -\frac{1}{2}\partial_x(u^2)$$

heißt nichtviskose Burgersgleichung.

Die Gleichung

$$\partial_t u = \nu \partial_x^2 u - \frac{1}{2}\partial_x(u^2) \quad, \nu > 0,$$

heißt viskose Burgersgleichung.

Motivation für die nichtviskose Burgergleichung:

Dazu betrachten wir allgemeine Gleichungen der Form

$$\partial_t u + \partial_x\big(f(u)\big) = 0$$

mit $t \geq 0, x \in \mathbb{R}, u(x,t) \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

Diese Gleichungen dienen als Modelle für Verkehrsflüsse

Wir machen folgende Modellannahmen:

1) Eine einspurige, sehr lange (d.h. unendlich lange) Straße modelliert durch $\mathbb{R}$.

2) Sehr viele Autos, modelliert durch die lokale Autodichte

$$\rho(t,x) = \frac{\text{Anzahl der Autos nahe } x \text{ zur Zeit } t}{\text{Einheitslänge}}.$$

3) Die lokale Geschwindigkeit des Verkehrs hängt nur von der lokalen Autodichte ab.

Frage: Wie entwickelt sich die lokale Verkehrsdichte und damit die lokale Verkehrsgeschwindigkeit?

Sei $\cdot\ x_1 < x_2$

$\cdot\ f(\underset{\rho}{\rho}) = \rho v(\rho)$ der Verkehrsfluss (lok. Masse mal lok. Geschw.).

Dann ist

$$\partial_t \int_{x_1}^{x_2} \rho(t,x)\,dx \overset{2}{=} f(\rho(t,x_1)) - f(\rho(t,x_2))$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} \partial_x f(\rho(t,x))\,dx.$$

Da $x_1 < x_2$ beliebig gewählt werden können, folgt

$$\partial_t \rho + \partial_x (f(\underset{\rho}{\rho})) = 0. \quad \text{// Hauptsatz der Variationsrechnung}$$

Wir brauchen jetzt noch ein Gesetz:

$$\rho \mapsto v(\rho).$$

Wir machen folgende Annahmen:

1) $\exists$ max. Autodichte ρ_{max} mit $v(\rho_{max}) = 0$ (Stau).

2) $\exists$ eine max. Geschwindigkeit $v_{max} = v(\rho = 0)$.

Durch Reskalieren können wir $\rho_{max} = 1$ und $v_{max} = 1$ setzen.

) Lineare Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Dichte,

$$\rho \mapsto v(\rho)$$

ist monoton fallend. // Umso höher die Dichte desto kleiner die Geschwindigkeit

Insgesamt erhalten wir dann

$\cdot\ v(\rho) = 1 - \rho$

$\cdot\ f(\rho) = \rho(1-\rho)$

$\cdot\ \partial_t \rho + \partial_x(\rho - \rho^2) = 0$

$\Rightarrow \partial_t \rho + \partial_x \rho - \partial_x(\rho^2) = 0.$

N.p. Dgln
(2)
07.05.12

Def.:

Sei $X = \mathcal{C}^0_{b,\text{unif.}}(\mathbb{R})$.
Eine Fkt. $u \in \mathcal{C}([0,T_0], X)$ heißt <u>milde Lösung</u> der viskosen Burgersgleichung für $\nu = 1$ zum Anfangswert $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn u die Variation der Konstanten-Formel (VdK-Formel)

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-\tau)\, N(u)(\tau)\, d\tau \quad (*)$$

erfüllt, wobei

$$T(t)u_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\, dy$$

der Lsg.soperator der Diffusionsgleichung ist und

$$N(u) = \frac{1}{2}\partial_x(u^2)$$

ist.

Lemma 3.1:

Ist u eine milde Lsg. und gilt zusätzlich
$$u \in \mathcal{C}([0,T_0], \mathcal{C}^2_{b,\text{unif.}}) \cap \mathcal{C}^1([0,T_0], \mathcal{C}^0_{b,\text{unif.}}).$$
Dann ist u eine klassische Lsg. der viskosen Burgersgleichung (also erfüllt diese Gleichung punktweise).

Beweis:

Ableiten der VdK-Formel (*) liefert (Stetigkeit der Anfangsbedingung)

$$\partial_t u(t) = \partial_x^2 T(t)u_0 + \underbrace{T(\underbrace{t-t}_{=0})}_{=\mathrm{Id}} N(u(t)) + \int_0^t \partial_x^2 T(t-\tau) N(u(\tau))\, d\tau$$

$$= \partial_x^2 u(t) + N(u)(t)$$

$$\overset{\text{Def. } N(u)}{=} \partial_x^2 u(t) - \frac{1}{2}\partial_x(u^2)(t),$$

wobei $\partial_t u, \partial_x^2 u, N(u) \in \mathcal{C}([0,T_0], \mathcal{C}^0_{b,\text{unif.}})$.

Theorem 3.2

$\forall\, C_0 > 0\ \exists\, T_0 > 0$: Für $u_0 \in X$ mit $\|u_0\|_{\mathcal{C}^0_b} \le C_0$ ex.

eine eindeutige milde Lsg. $u \in \mathcal{C}([0,T_0], X)$ der viskosen Burgersgleichung zum Anfangswert u_0.

Beweis:

Sei o.B.d.A. $\nu = 1$.

Wir führen den Beweis mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes im vollständigen metrischen Raum

$$M := \mathcal{C}^0([0,T_0], \{u \in X : \|u\|_{\mathcal{C}^0_b} \le 2\|u_0\|_{\mathcal{C}^0_b} =: C_1\})$$

für ein noch geeignet zu wählendes T_0.

Auf M führen wir die Norm

$$\|u\|_M := \sup_{0 \le t \le T_0} \underbrace{\|u(t)\|_{\mathcal{C}^0_b}}_{=: \|u(t)\|_X}$$

ein.

Wir wollen zeigen, dass die rechte Seite der VdK-Formel, im folgenden mit F bezeichnet, eine Kontraktion auf M definiert.

Dazu benötigen wir die folgenden Abschätzungen

a) $\|T(t)u_0\|_X \le \|u_0\|_X$

b) $\|T(t)\partial_x u_0\|_X = \|\partial_x T(t) u_0\|_X$

$$\le C \cdot t^{-\frac{1}{2}} \|u_0\|_X \quad \text{für } C > 0$$

(beide Abschätzungen haben wir in Abschnitt 2.2 gezeigt).

N. p. Dgln.
3
07.05.12

c) $\|\partial_x^{-1} N(u)\|_M \le \frac{1}{2} \|u\|_M^2 \le C_1^2$

d) $\|\partial_x^{-1}(N(u)-N(v))\|_M \le \frac{1}{2}\|u+v\|_M \|u-v\|_M$

$$\le C_1 \|u-v\|_M .$$

08.05.12 Wir zeigen nun: F bildet M auf M ab

$$\|F(u)\|_M = \sup_{0\le t\le T_0} \Big\|T(t)u_0 + \int_0^t T(t-\tau)N(u)(\tau)\,d\tau\Big\|_X$$

$$\le \sup_{0\le t\le T_0} \|T(t)u_0\|_X + \sup_{0\le t\le T_0} \int_0^t \|T(t-\tau)N(u)(\tau)\|_X\,d\tau$$

$$\overset{a),b)}{\le} \|u_0\|_X + \sup_{0\le t\le T_0} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\, \|\underbrace{\partial_x^{-1} N(u)(\tau)}_{=\frac{1}{2}u^2(\tau)}\|_X\,d\tau$$

$$\le \|u_0\|_X + \Big(\sup_{0\le t\le T_0} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\,d\tau\Big)\|\partial_x^{-1}N(u)\|_M$$

$$\overset{c)}{\le} \frac{1}{2}C_1 + C_1^2 \cdot 2\, T_0^{1/2}$$

$$\le C_1$$

für $T_0^{1/2} \le \frac{1}{4} C_1^{-1}$.

Nun zeigen wir: F ist Kontraktion

$$\|F(u)-F(v)\|_M = \sup_{0\le t\le T_0} \Big\|\int_0^t T(t-\tau)\big(N(u)-N(v)\big)(\tau)\,d\tau\Big\|_X$$

$$\le \sup_{0\le t\le T_0} \int_0^t \|T(t-\tau)\big(N(u)-N(v)\big)(\tau)\|_X\,d\tau$$

$$\overset{b)}{\le} \sup_{0\le t\le T_0} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\, \|\partial_x^{-1}\big(N(u)-N(v)\big)(\tau)\|_X\,d\tau$$

$$\le \Big(\sup_{0\le t\le T_0} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\,d\tau\Big)\|\partial_x^{-1}\big(N(u)-N(v)\big)\|_M$$

$$\overset{a)}{\leq} 2T_0^{1/2} C_1 \|u-v\|_H$$

$$\leq \frac{1}{2} \|u-v\|_H$$

für $2T_0^{1/2} \leq \frac{1}{2} C_1^{-1}$.

Für hinr. kleines T_0 (nur abhängig von C_1 und damit von $\|u_0\|_X$) ist F Kontraktion. Somit liefert der Banach'sche Fixpunktsatz die Behauptung. ∎

Bemerkung 1:

Da $T(t)$ für alle $t>0$ glättend ist und $N(u)$ keine höheren Ableitungen als ∂_x enthält, kann man zeigen, dass die eben bewiesene existierende milde Lsg. auch klass. Lsg. ist. Da jede klass. Lsg. auch milde Lsg. ist, folgt die lokale Existenz und Eindeutigkeit von klass. Lsg.en für AW $u_0 \in \mathcal{C}^0_{b,unif}$. ∎

Bemerkung 2:

Die obige Beweisstrategie funktioniert allgemeiner für Gleichungen der Form

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + f(u, \partial_x u)$$

mit f glatt, aber nicht für Gl. der Form

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + f(u, \partial_x u, \partial_x^2 u),$$

weil dann im Integral ein Faktor $(1+(t-\tau)^{-1})$ vorkommt. ∎

N.p. Dgln
①
08.05.12

Theorem 33: [Vergleichsprinzip]

Seien u_1, u_2 zwei klass. Lsgen der viskosen Burgersgleichung mit $u_1(x,t_0) \le u_2(x,t_0)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

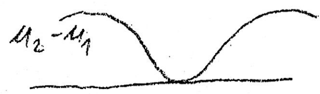
Dann gilt
$$u_1(x,t) \le u_2(x,t)$$
$\forall x \in \mathbb{R}$ und $\forall t \ge t_0$ (solange u_1, u_2 exist.).

Beweis:

Angenommen, die Behauptung sei falsch.

Dann ex. $t_1 > t_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass
$$u_1(x_0,t_1) = u_2(x_0,t_1),$$
da sich die Lsg.en stetig bzgl. t und x verändern.

Dann gilt
$$\partial_x u_1(x_0,t_1) = \partial_x u_2(x_0,t_1) \text{ und}$$
$$\partial_x^2 u_1(x_0,t_1) \le \partial_x^2 u_2(x_0,t_1).$$



1. Fall: Sei $\partial_x^2 u_1(x_0,t_1) < \partial_x^2 u_2(x_0,t_1)$.

Dann gilt
$$\partial_t(u_2(x_0,t_1) - u_1(x_0,t_1)) = \partial_x^2(u_2(x_0,t_1) - u_1(x_0,t_1)) - \frac{1}{2}\partial_x\left((u_2(x_0,t_1) - u_1(x_0,t_1))^2\right)$$
$$= \partial_x^2 u_2(x_0,t_1) - \partial_x^2 u_1(x_0,t_1) \underbrace{- (u_2(x_0,t_1) - u_1(x_0,t_1))\,\partial_x(u_2(x_0,t_1) - u_1(x_0,t_1))}_{=0}$$
$$> 0$$
$\Rightarrow u_2 - u_1(x_0,t) > 0$ für $t > t_0$, $|t - t_0| \ll 1$.

2\. Fall: $\partial_x^2 u_1(x_0,t_1) = \partial_x^2 u_2(x_0,t_1)$.

Ersetze u_2 durch $\bar{u}_{2,\varepsilon}$ mit $\bar{u}_{2,\varepsilon}(x,t) = u_2(x,t) + \varepsilon(t-t_1)$, $\varepsilon > 0$.

Dann gilt:

$$\partial_t(\bar{u}_{2,\varepsilon} - u_1)(x_0,t_1) \geq \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow u_1(x_0,t) < u_2(x_0,t) + \varepsilon(t-t_1)$ für $t \geq t_1$, $|t-t_1| \ll 1$

$\Rightarrow (u_1 - u_2)(x,t) < \varepsilon(t-t_1)$.

// irgendwo im Beweis braucht man das: $\partial_t u = \partial_x^2 u - \frac{1}{2}\partial_x(u^2)$

$$\begin{aligned} \partial_t(u_2 - u_1) &= \partial_x^2(u_2-u_1) - \tfrac{1}{2}\partial_x(u_2^2 - u_1^2) \\ &= \partial_x^2(u_2-u_1) - \tfrac{1}{2}\partial_x\big((u_2-u_1)(u_2+u_1)\big) \\ &= \partial_x^2(u_2-u_1) - \tfrac{1}{2}\big(\underbrace{\partial_x(u_2-u_1)}_{=0}\big)(u_2+u_1) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\underbrace{(u_2-u_1)}_{=0}\partial_x(u_2+u_1) \end{aligned}$$

$\varepsilon \to 0$ liefert

$$u_1 - u_2\,(x_0,t) \leq 0$$

$\blacksquare$

<u>Korollar 3.4:</u>

Sei u klass. Lsg. der viskosen BG mit $0 \leq u_0(x) \leq C$.
Dann folgt

$$0 \leq u(x,t) \leq C.$$

<u>Beweis:</u>

Da $u_1 \equiv 0$ und $u_2 \equiv C$ klass. Lsg.en der viskosen BG sind, folgt die Beh. direkt aus dem Vergleichsprinzip. $\blacksquare$

<u>Theorem 3.5:</u>

Sei $u_0 \in \mathcal{C}^0_{b,unif.}$ mit $0 \leq u_0 \leq C$.
Dann ex. eine eindeutige klass. Lsg.

$$u \in \mathcal{C}([0,\infty), \mathcal{C}^0_{b,unif.})$$

der visk. BG mit $u(x,0) = u_0(x)$.

<u>Beweis:</u>

Theorem 3.2 + Beweis und Bem. 1 liefern die eindeutige Existenz einer klass. Lsg. $u \in \mathcal{C}([0,T], \mathcal{C}^0_{b,unif.})$.

mit $u(x,0)=u_0(x)$, wobei T_0 nur von $\|u_0\|_{\mathcal{C}_b^0}$ abhängt.
Nach Kor. 3.4 gilt

$$0 \leq u(\cdot, T_0) \leq C.$$

Nehme nun $u(\cdot, T_0)$ als neuen Anfangswert. Wegen

$$\|u(\cdot, T_0)\|_{\mathcal{C}_b^0} \leq \|u_0\|_{\mathcal{C}_b^0}$$

ergibt sich die eindeutige Existenz einer klass. Lsg.

$$u \in \mathcal{C}([T_0, 2T_0], \mathcal{C}^0_{b,\text{unif.}})$$

mit $0 \leq u(\cdot, t) \leq C$.
Fortsetzen dieses Verfahrens liefert

$$T_0 \to 2T_0 \to 3T_0 \to \dots \infty. \quad ∎$$

Spezielle Lsgen der visk. BG:
a) stationäre Lösungen, d.h. $\partial_t u = 0$

$$\Rightarrow -\tfrac{1}{2}\partial_x(u^2) \text{ [redacted] } + \partial_x^2 u = 0 = \partial_x(\partial_x u - \tfrac{1}{2}u^2).$$

In $\mathcal{C}^0_{b,\text{unif.}}$ sind das genau alle konstanten Fkten

$u \equiv C$, $C \in \mathbb{R}$.

<u>Def.:</u>
Eine [redacted] Lsg. u_* heißt stabil in X [redacted]

$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \|u_0 - u_*(\cdot, 0)\|_X < \delta$$

$$\Rightarrow \forall t > 0: \|u(\cdot, t) - u_*(\cdot, t)\|_X < \varepsilon,$$

wobei u [redacted] Lsg. zum AW u_0 ist.

Eine stabile heißt asymptotisch stabil, falls

$$\lim_{t\to\infty} u(\cdot,t) = \lim_{t\to\infty} u_*(\cdot,t) \text{ bzgl. der } X\text{-Norm}$$

gilt für alle Lsgen u in einer Umgebung von u_*.

<u>Satz 3.6:</u>

Die stationären Lsgen der viskosen BG $u_* \equiv C$ sind stabil, aber nicht asymptotisch stabil in $C^0_{b,unif.}$.

<u>Beweis:</u>

Für ggf. $\varepsilon>0$ wähle $\delta=\varepsilon$.

Nach dem Vergleichsprinzip folgt aus $\|u_0-u_*\|_{C^0_b} < \delta = \varepsilon$, d.h. $u_*-\varepsilon \le u_0 \le u_*+\varepsilon$, dass

$$\forall t>0: u_*-\varepsilon \le u(\cdot,t) \le u_*+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall t\ge 0: \|u(\cdot,t)-u_*\|_{C^0_b} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Stabilität.

Da es in jeder ε-Umgebung von $u_*\equiv C$ unendlich viele stat. Lös. $\{u_*+\tilde\varepsilon \mid |\tilde\varepsilon|<\varepsilon\}$ gibt, kann $u_*\equiv C$ nicht asympt. stabil sein.

14.05.12

<u>Frontlösungen für die viskose BG:</u>

Wir suchen Lsg.en der Gestalt

$$u(x,t) = v(x-ct) = v(\xi) \qquad (*)$$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} v(\xi) = v_\pm \ge 0$$

$\Downarrow$

Frontlösungen für die viskose Burgersgleichung:

Wir suchen Lösungen der Gestalt

$$u(x,t) = v(x-ct) =: v(\xi) \quad , \quad c \neq 0 \quad (*)$$

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} v(\xi) = v_\pm \geq 0 \quad , \quad \lim_{\xi \to \pm\infty} \partial_\xi v(\xi) = 0$$

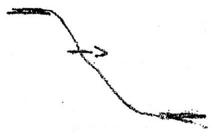
Einsetzen von (*) in die viskose Burgersgleichung, liefert im Fall $\nu \equiv 1$ (d.h. $\partial_t u = \partial_x^2 u - u\partial_x u$):

$$-cv' = v'' - vv' \quad , \quad ' := \partial_\xi$$

$$= v'' - \frac{1}{2}(v^2)'$$

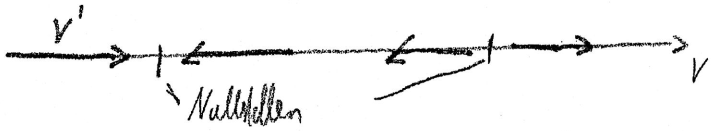
$$\Rightarrow v' = \frac{1}{2}(v^2 - 2cv - d) \qquad d \mathrel{\hat{=}} \text{Integrationskonstante}$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{2}(v - v_-)(v - v_+),$$



falls $c = \frac{1}{2}(v_+ + v_-) > 0 \quad , \quad d = -v_+ v_-$

v' in Abhängigkeit von v



Phasendiagramm

$\Rightarrow v_- > v_+$

Also muss $v_- > v_+$ sein. Umgekehrt ist für bel. $v_- > v_+ \geq 0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{1}{2}(v_+ + v_-)$ eindeutig bestimmt. (gw v_-, v_+ werden vorgegeben)

Bem:
Sei u Lösung der viskosen Burges Gleichung und sei $\hat{u} = u + k$, $\tilde{x} = x - kt$. Dann löst $\hat{u}(\tilde{x}, t)$ die viskose Burgesgleichung, also

$$\partial_t \hat{u} = \partial_{\tilde{x}}^2 \hat{u} - \hat{u}\,\partial_{\tilde{x}} \hat{u}.$$

Die Cole-Hopf Transformation: Burgersgleichung

Sei u Lösung der viskosen BG und $\partial_x \Phi = u$. Dann gilt:

$$\partial_t \Phi = \nu \partial_x^2 \Phi - \frac{1}{2}(\partial_x \Phi)^2$$

Sei $\Phi = g(\Psi)$. Dann gilt

$$g'(\Psi)\partial_t \Psi = \nu g''(\Psi)(\partial_x \Psi)^2 + \nu g'(\Psi)\partial_x^2 \Psi - \frac{1}{2}(g'(\Psi)\partial_x \Psi)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad g'(\psi)(\partial_t \psi - \nu \partial_x^2 \psi) = (\nu g''(\psi) - \tfrac{1}{2} g'(\psi)^2)(\partial_x \psi)^2 \qquad (\square)$$

$(\square)$ kann gelöst werden, indem ψ die Gleichung

$$\partial_x \psi = \nu \partial_x^2 \psi$$

löst und

$$g''(\psi) = \frac{1}{2\nu} (g'(\psi))^2$$

gilt, also

$$g(\psi) = -2\nu \ln \psi$$

ist. Rücktransformation liefert dann

$$u(x,t) = -2\nu \frac{\partial_x \psi(x,t)}{\psi(x,t)} \quad \text{bzw.} \quad \psi(x,t) = e^{-\frac{1}{2\nu} \int_a^x u(y,t)\, dy}.$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Anfangswert (=AW) } u_0 & \xrightarrow{\text{Lös. der viskosen BG}} & u(\cdot,t) \\
\Big\downarrow \text{„Cole-Hopf-Transformation"}\ T & & \Big\uparrow \text{„Rücktransformation"}\ T^{-1} \\
\psi_0 & \xrightarrow[\substack{\text{Löse: } \partial_t \psi = \nu \partial_x^2 \psi \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0}]{} & \psi(\cdot,t)
\end{array}$$

Explizit erhalten wir dann

$$u(x,t) = \frac{\int \left(\frac{x-y}{t}\right) \exp(-h(x,y,t))\, dy}{\int \exp(-h(x,y,t))\, dy}$$

$$h(x,y,t) = \frac{(x-y)^2}{4\nu t} + \frac{1}{2\nu} \int_a^y u_0(\xi)\, d\xi.$$

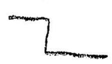
Beispiel:

Diracdistribution

$$u_0 = M\delta_0 \quad , M > 0$$

Wähle $a = -\infty$, dann ergibt sich

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ e^{-\frac{M}{2\nu}} =: \underset{<0}{z} + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$



Rechnung

$$\Rightarrow \psi(x,t) = 1 + z\, \mathrm{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\right), \text{ wobei } \mathrm{Erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{4}}\, dy$$

Erf, erf sind Errorfunktionen

$$\Rightarrow u(x,t) = -\frac{2\nu z}{\sqrt{4\pi\nu t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}}{1 + z\, \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\right)} \quad \text{mit } \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2}\, dy$$

Reskaliertes Profil ist dann

$$\sqrt{t}\, u(x\sqrt{t},t) = -\frac{2\nu z}{\sqrt{4\pi\nu}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\nu}}}{z \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\right)}.$$

Lösung des nicht-viskosen BG mit Hilfe der Methode der Charakteristiken:

Die nicht-viskose BG

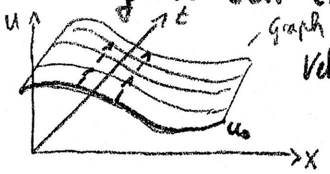
$$\partial_t u + u\partial_x u = 0$$

ist vom Typ

$$\partial_t u + a(t,x,u)\,\partial_x u = b(t,x,u). \qquad (1.)$$

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Beobachtung: Das Vektorfeld $(1, a(t,x,u), b(t,x,u))$ ist tangential zum Graphen der Lösung u von (1.). Denn $(\partial_t u, \partial_x u, -1)$ ist Normalenvektor des Graphen



Vektorfeld in der Tangentialebene

und es gilt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ a(t,x,u) \\ b(t,x,u)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_x u \\ -1\end{pmatrix} \right\rangle \overset{(1.)}{=} 0.$$

Stiel vektorfeldes

Außerdem ist $(1, a(t,x,u_0), b(t,x,u_0))$ nicht tangential zum Graphen von u_0 (Anfangswerte des Graphen von u_0).

Idee der Charakteristikenmethode:

Bestimme die zum Vektorfeld $(1,a,b)$ gehörenden Integralkurven und setze den Graphen von u aus diesen zusammen.

Betrachte also das gewöhnliche Diff.-gl.-System:

$$\dot{s}(t) = 1 \qquad , s(0) = 0$$

$$\dot{x}(t,x_0) = a(s(t), x(t), y(t)) \qquad , x(0,x_0) = x_0$$

$$\dot{y}(t,x_0) = b(s(t), x(t), y(t)) \qquad , y(0,x_0) = u_0(x_0)$$

$\Rightarrow s(t) = t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t,x_0) = a(t,x(t),y(t)) & , x(0,x_0) = x_0 \\ \dot{y}(t,x_0) = b(t,x(t),y(t)) & , y(0,x_0) = u_0(x_0) \end{cases}$$

Für hinr. reguläre a, b ist dieses System lokal eindeutig lösbar.

Für die Lösung von (1) [redacted] gilt dann

$$\boxed{u(x,t) = y(x^{-1}(t,x),t)}.$$

Man erhält folgenden Satz.

Satz:
Für $a, b, u_0 \in \mathcal{C}^1$ erhält man durch die Methode der Charakteristiken lokal (also für $t \in [0,t_0]$ für ein $t_0 > 0$) die eindeutige klassische Lösung von (1.).

Bem.:
Die Charakteristikenmethode läßt sich noch verallgemeinern für PDG's der Form

$$F(t, x_1, \ldots, x_n, u, \partial_t u, \partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u) = 0$$

mit $F \in \mathcal{C}^1$.

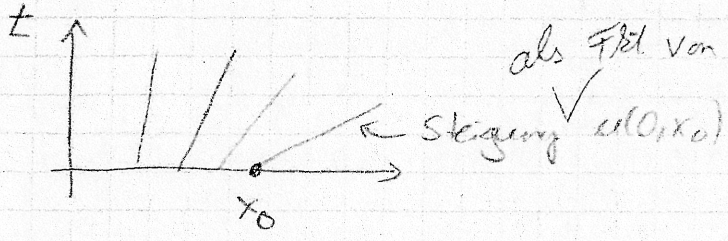
unleserlich

Im Fall der BG gilt

$$\dot y = 0 \Rightarrow y(t) = y(0)$$

$$\dot x(t, x_0) = u(x(t,x_0), t) = u(x_0, 0)\,?$$

$$\Rightarrow x(t,x_0) = x_0 + u(0,x_0)\,t$$

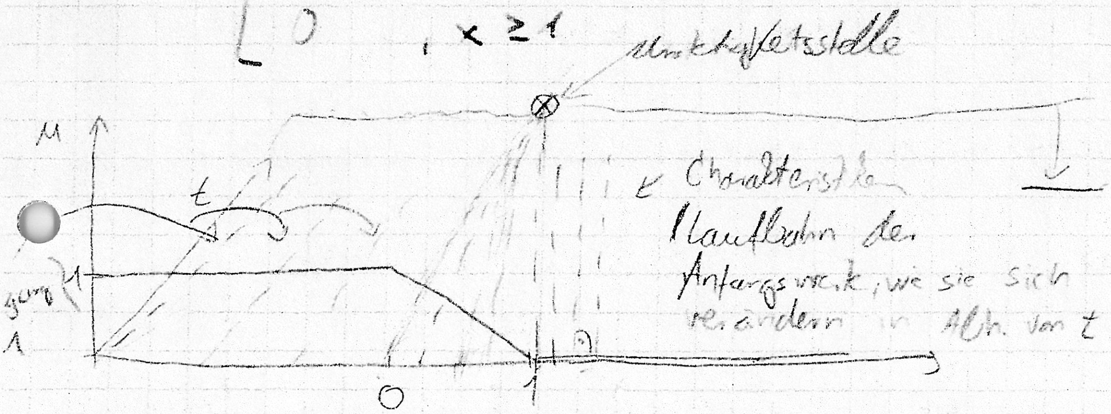


$$\Rightarrow u(x,t) \overset{?}{=} u_0(x - t\,u_0(x_0))$$

$$\overset{?}{=} u_0(x - t\,u(x,t)) \qquad (0).$$

Beispiel:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & , x \le 0 \\ 1-x & , x \in [0,1] \\ 0 & , x \ge 1 \end{cases}.$$



Wann können Unstetigkeitsstellen auftreten?

Aus (0) folgt:

$$\partial_x u(x,t) = \partial_x u_0(x_0)\,(1 - t\,\partial_x u(x,t))$$

$$\Rightarrow \partial_x u(x,t) = \frac{\partial_x u_0(x_0)}{1 + t\,\partial_x u_0(x_0)}.$$

($\Leftrightarrow \partial_x u(x,t) + t\,\partial_x u\,\partial_x u_0 = \partial_x u_0 \Leftrightarrow \partial_x u = \partial_x u_0 - t\,\partial_x u\,\partial_x u_0$)

(1) U

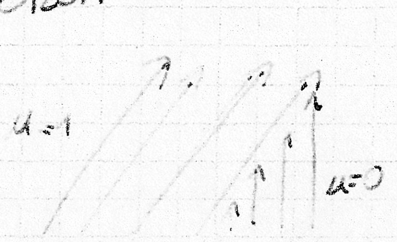
15.05.12

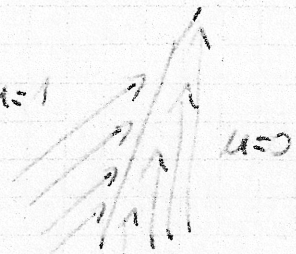
ist $\inf_{x\in\mathbb{R}} \partial_x u_0(x_0) < 0$, dann folgt:

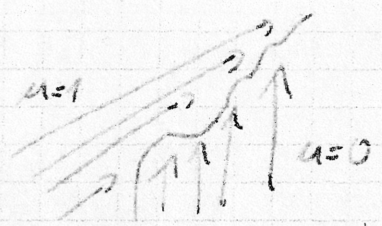
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\partial_x u(x,t^*)| \overset{!}{=} \infty$$

für $t^* = -\dfrac{1}{\inf_{x_0\in\mathbb{R}} \partial_x u_0(x_0)}$.

Wie können wir Lösungen mit Unstetigkeitsstellen fortsetzen?







Welche dieser Lösungen ist physikalisch? (Kommentar)

Definition:

u heißt schwache Lösung der BG, wenn

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} \left(u\,\partial_t \varphi + \frac{1}{2} u^2 \partial_x \varphi\right) dx\,dt = 0$$

// u muss nicht stetig oder diff.bar sein

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ gilt.

Beispiel:

Sei

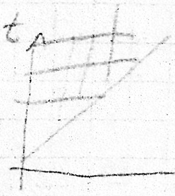
$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Dann ist

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \le \frac{1}{2}t \\ 0, & x > \frac{1}{2}t \end{cases}$$

schwache Lsg. der Burgersgleichung.

$$\Gamma \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u\,\partial_t \varphi + \tfrac{1}{2} u^2\, \partial_x \varphi)\, dx\, dt$$



Integrationsreihenfolge ändern

$t/2$ // $u = 0$ für $x > \frac{1}{2}t$, sonst 1

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{t/2} \partial_t \varphi + \tfrac{1}{2}\, \partial_x \varphi \; dx\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\max(0,2x)}^{\infty} \partial_t \varphi(x,t)\, dt\, dx - \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \varphi(\tfrac{t}{2}, t)\, dt = 0$$

$\llcorner$

Allgemeiner:

Sei $\cdot\; u_l > u_r$

$$\cdot\; u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x \le 0 \\ \vee & \\ u_r, & x > 0. \end{cases}$$

Dann ist

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x \le \alpha t \\ u_r, & x > \alpha t \end{cases} \qquad \text{mit } \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_r^2 - u_l^2}{u_r - u_l} = \frac{1}{2}(u_l + u_r),$$

nn:

schwache Lsg. der BG: $\quad$ $u(x,t)$ aufgeteilt

$$0 \overset{!}{=} \int_0^\infty \Big(\int_{-\infty}^{\alpha t} u_l\, \partial_t \varphi + \tfrac{1}{2} u_l^2\, \partial_x \varphi\, dx + \int_{\alpha t}^{\infty} u_r\, \partial_t \varphi + \tfrac{1}{2} u_r^2\, \partial_x \varphi\, dx \Big)\, dt$$

Integrationsreihenfolge ändert

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{\max(0,\frac{x}{\alpha})}^{\infty} u_l\, \partial_t \varphi\, dt + \int_0^{\max(0,\frac{x}{\alpha})} u_r\, \partial_t \varphi\, dt \Big)\, dx$$

nach dx integriert nur noch nach dt übrig

$$- \int_0^\infty \tfrac{1}{2} (u_r^2 - u_l^2)\, \varphi(\alpha t, t)\, dt$$

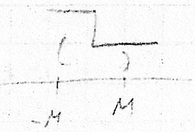
$$\overset{!}{=} \int_0^\infty \underbrace{\Big[(u_r - u_l) - \frac{1}{2\alpha}(u_r^2 - u_l^2) \Big]}_{\overset{!}{=} 0} \varphi(x, \tfrac{x}{\alpha})\, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{u_r^2 - u_l^2}{u_r - u_l}.$$

15.05.12 Allgemeiner: für eine schwache Lsg. von $\partial_t u = -\partial_x f(u)$ erhält man:

Sei $t > 0$

- M hinr. groß, so dass $x = -M$ links und $x = M$ rechts von der Unstetigkeitsstelle liegt.



Betrachte

$$g(t) = \int_{-M}^{M} u \, dx$$

$$\overset{!}{=} u_l(M + \alpha t) + u_r(M - \alpha t) \quad = \underbrace{(u_l + u_r)M + t(\alpha(u_l - u_r))}_{\text{nach } t \text{ ableiten}}$$

$$\Rightarrow \alpha(u_l - u_r) = g'(t)$$

$$= \int_{-M}^{M} \partial_t u \, dx$$

$$= \int_{-M}^{M} -\partial_x f(u) \, dx$$

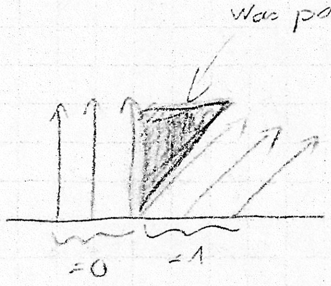
$$\overset{!}{=} f(u_l) - f(u_r)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\overset{\text{Sprung}}{[f]}}{[u]} = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}$$

Rankine-Hugoniot Sprungbedingung.

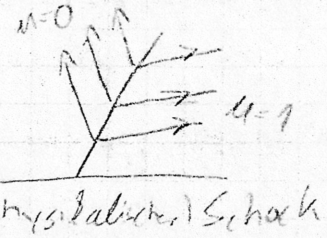
Sei nun $u_r > u_l$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}.$$



Dann ist

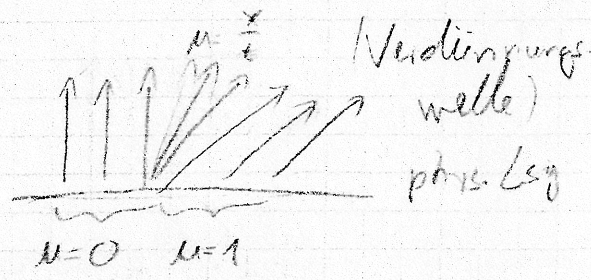
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & , x \leq \frac{1}{2} t \\ 1 & , x > \frac{1}{2} t \end{cases}$$



(unphysikalischer) Schock

schwache Lsg. der BSA, aber auch

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & , x \in [0,t] \\ 1 & , x \geq t \end{cases}$$



+ schwache Lsg..

Kriterien, mit denen die Verdünnungswelle als Lsg. ausgewählt wird. Dazu betrachte wieder allgemeiner

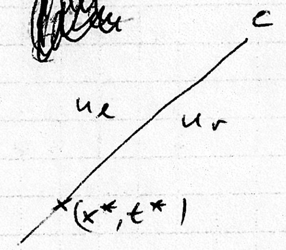
$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \qquad , f \in C^1,$$
$$u(x,0) = u_0(x).$$

1) u erfüllt die Entropiebedingung, d.h.

sei · C eine Unstetigkeitslinie.

· $(x^*, t^*) \in C$

· $\lim\limits_{x \to (x^*)^-} u(x,t^*) = u_l$ ← von links



$\lim\limits_{x \to (x^*)^+} u(x,t^*) = u_r$. ← von rechts

Außerdem treffe sowohl von links als auch von rechts eine Charakteristik den Punkt (x^*, t^*).

Dann gelte

$$f'(u_l) \overset{!!}{>} b \overset{!!}{>} f'(u_r). \qquad , b \in \mathbb{R}$$

ist f gleichm. konvex mit $f'' \geq \Theta > 0$, dann ist dies äquivalent zu $u_l > u_r$.

2) u $\in C^0([0,\infty); L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ ist Entropielsg., d.h. für jedes Entropie/ Entropieflusspaar

$$\Phi, \Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

(3)
15.05.12

mit $\cdot$ Φ konvex

$\cdot$ $\Phi'(z) f'(z) = \Psi'(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

gilt

$$\partial_t \Phi(u) + \partial_x \Psi(u) \leq 0 \quad \text{in distributionellen Sinne,}$$

d.h.

$$\forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty)),\ v \geq 0: \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(u)\, \partial_t v + \Psi(u)\, \partial_x v \, dx\, dt \geq 0.$$

Außerdem gilt

$$\lim_{t \to 0} u(\cdot, t) = u_0(\cdot) \quad \text{bzgl. } L^1.$$

Bemerkung:

Entropielösungen sind (bis auf eine Nullmenge) eindeutig.

3) u ist (verschwindende) Viskositätslsg., d.h.

$$u = \lim_{\nu \to 0} u^\nu \quad \text{f.ü.,}$$

wobei $u^\nu|_{\nu > 0}$ glm. beschr. in L^∞ ist und

$$\begin{cases} \partial_t u^\nu + \partial_x f(u^\nu) - \nu\, \partial_x^2 u^\nu = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u^\nu(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

löst.

Bemerkung:

Kriterium 3) $\Rightarrow$ Krit. 2).