21.4.09.

4. Die nichtlineare Schrödinger-Gleichung

Die Gleichung

$$\partial_t u = i a_1 \partial_x^2 u + i a_2 |u|^2 u$$

mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $u = u(x,t) \in \mathbb{C}$ heißt (eindimensionale) nichtlineare Schrödingergleichung (NLS-Gleichung).

Durch Reskalierung $u \longrightarrow \beta_1 u$, $x \longrightarrow \beta_2 x$, $t \longrightarrow \beta_3 t$ mit $\beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ kann die NLS-Gleichung auf die Form

$$\partial_t u = -i \partial_x^2 u + \alpha i |u|^2 u$$

mit $\alpha = \pm 1$ gebracht werden. Im Fall $\alpha = +1$ heißt die Gl. auch defokussierende NLS-Gl., im Fall $\alpha = -1$ fokussierende NLS-Gl.. Eine Verallgemeinerung der NLS-Gl. ist die Gross-Pitaevski-Gl.

$$\partial_t u = -i \partial_x^2 u + V(x) u + \alpha i |u|^2 u .$$

Spezielle Lösungen der NLS-Gleichung

1. Ortsunabhängige Lösungen

Ansatz: $u(x,t) = v(t)$

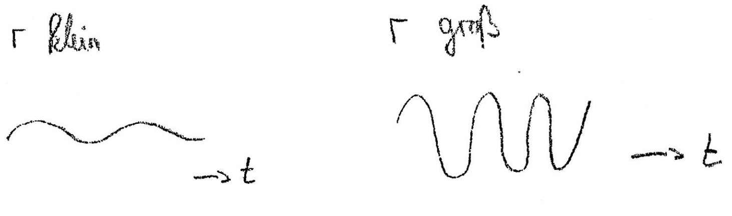
Einsetzen des Ansatzes in die NLS-Gl. liefert

$$\partial_t v = \alpha i v |v|^2$$

Übergang zu Polarkoordinaten $v(t) = r(t) e^{i\Phi(t)}$ liefert

$$\partial_t r = 0 \quad , \quad \partial_t \Phi = \alpha r^2$$

$$\Rightarrow v(t) = r(0) e^{i(\Phi(0) + \alpha (r(0))^2 t)}$$



2. Periodische Lösungen

Ansatz: $u(x,t) = e^{ikx} v(t)$

Einsetzen in die NLS-Gl. liefert

$$\partial_t v = ik^2 v + \alpha i v |v|^2.$$

Einführen von Polarkoordinaten $v(t) = r(t) e^{i\Phi(t)}$ liefert

$$\partial_t r = 0, \quad \partial_t \Phi = k^2 + \alpha r^2$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \underbrace{r(0)}_{\geq 0} \cdot \exp\left(i\left(kx + \Phi(0) + \underbrace{(k^2 + \alpha r^2(0))}_{=\omega(k,r(0))} t\right)\right)$$

Im defokussierenden Fall ist für $r(0) > 0$ stets $\omega(k, r(0)) > 0$, d.h. alle Oszillationen nach links. Im fokussierenden Fall kann für $r(0) > 0$ sowohl $\omega > 0$, $\omega = 0$ als auch $\omega < 0$ sein, d.h. Oszillationen können nach links oder nach rechts laufen, oder stationär sein.

3. Pulslösungen

Ansatz: $u(x,t) = B(x - ct) e^{i(qx - \omega t + \Phi_0)}$ mit $B(\xi) \in \mathbb{R}$.

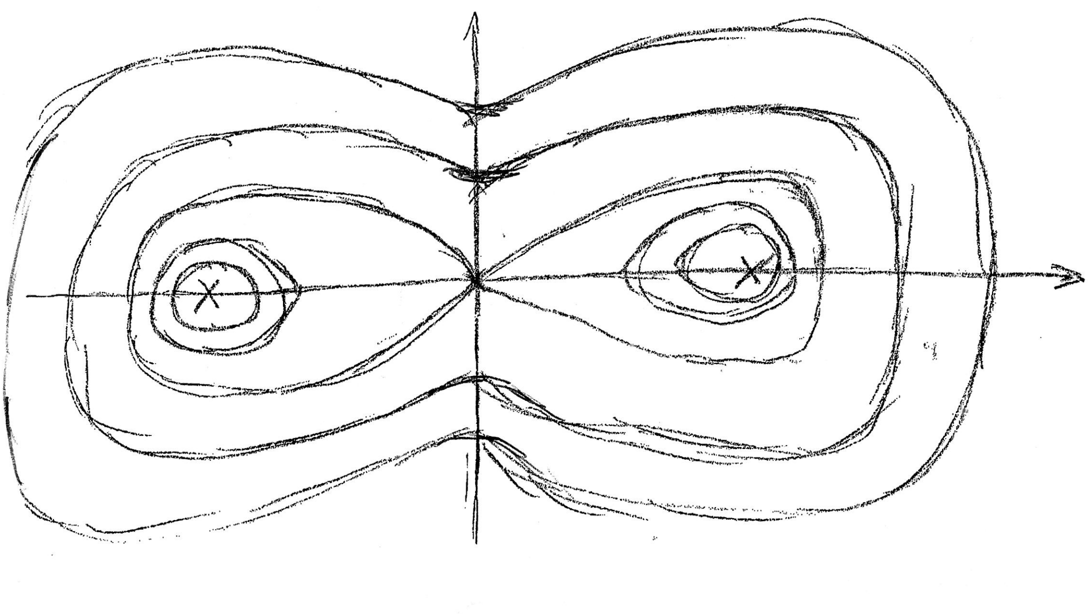
Einsetzen in die NLS-Gl. liefert

$$-i\omega B - cB' = -iB'' + 2qB' + iq^2 B + \alpha i B^3$$

Für $c = -2q$ ergibt sich

$$B'' = (\omega + q^2) B + \alpha i B^3$$

Im Fall $\alpha = -1$ und $(\omega + q^2) > 0$ ergibt sich das folgende Phasenporträt für B:



× Fixpkte

Es gibt also homokline Orbits mit

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} B(\xi) = 0 \; ; \; \lim_{\xi \to \pm\infty} B'(\xi) = 0 .$$

Man kann ausrechnen, dass

$$u(x,t) = \sqrt{2}\, \eta \, \mathrm{sech}(\eta(x - x_0 - ct)) \exp\left(i\left((c^2 - 4\eta^2)t - 2cx + \gamma\right)/4\right)$$

mit $\eta, c, \gamma, x_0 \in \mathbb{R}$ exakte Lösungen der fokussierenden NLS-Gl. sind.

<u>Theorem</u> 4.1:

Sei $u_0 \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dann $\exists T > 0$; so dass eine eindeutige lokale Lösung $u \in C([0,T], H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ der NLS-Gl. mit $u|_{t=0} = u_0$ existiert.

<u>Beweisstrategie:</u>

Man verwendet, dass die Lösungskurve der linearen S-Gl. $u(t) = e^{it\partial_x^2} u_0$ stetig in $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist, (das kann man analog zum Beweis der Stetigkeit der Lösungskurve in L^2 nachweisen). Außerdem ist die Nichtlinearität $u \longrightarrow i\alpha |u|^2 u$ lokal Lipschitzstetig in $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Mit Hilfe der Variation der Konstanten Formel und dem Banachschen Fixpunktsatzes ergibt sich dann die lokale Existenz und Eindeutigkeit.

<u>Bem.:</u>

Man kann die NLS-Gleichung auch rückwärts in der Zeit lösen und erhält lokal eindeutige Lösungen

$$u \in C([-T,T], H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})).$$

<u>Interpretation der NLS-Gl. als Hamiltonsches System.</u>

Betrachte das Funktional

$$H(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |\partial_x u(x)|^2 + \frac{1}{4} \alpha |u(x)|^4 \, dx.$$

Dann gilt

$$\partial_u H(u)[v] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H(u+\varepsilon v) - H(u)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x(u+\varepsilon v)|^2/2 - |\partial_x(u)|^2/2 + \alpha|u+\varepsilon v|^4/4 - |u|^4/4 \, dx$$

$$= \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} (-\partial_x^2\bar u + \alpha \bar u |u|^2) v \, dx$$

$\partial_u H(u)$ definiert also eine stetig lineare Abb. von $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) ($v \to \partial_u H(u) v$), also ein Element des Dualraumes des Hilbertraumes $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz ist $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ isomorph zu seinem Dualraum und die Elemente des Dualraumes können mit Hilfe der Abb.

$$\beta: \mathrm{Lin}(L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}),\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$$
$$\Big(v \longmapsto \langle u,v\rangle = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} \bar u(x) v(x)\, dx\Big) \longmapsto u$$

mit Elementen aus $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ identifiziert werden (kanonischer Isomorphismus). In unserem Fall erhalten wir:

$$\beta\,\partial_u H(u) = -\partial_x^2 u + \alpha u|u|^2 .$$

Daher können wir die NLS-Gl. schreiben als 22.05.12 (1)

$$\partial_t u = -i\partial_x^2 u + \alpha i\, u|u|^2 = i\beta\,\partial_u H(u) = J\beta\,\partial_u H(u)$$

wobei $J: u \to u$ ein schiefsymmetrischer Operator in $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ist.

$$\langle Ju, v\rangle = \mathrm{Re}\int \overline{iu(x)}\, v(x)\, dx = -\mathrm{Re}\int \overline{u(x)}\, i v(x)\, dx$$
$$= -\langle u, Jv\rangle$$

Aufgrund dieser Struktur ist die NLS-Gl. ein Hamiltonsches System zur Hamiltonfunktion $H(u)$. Wie bei allen Hamiltonschen Systemen ist die Hamiltonfunktion eine Erhaltungsgröße, was man hier auch einfach direkt nachrechnen kann.

$$\frac{d}{dt} H(t) = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac12|\partial_x u|^2 + \frac14\alpha|u|^4 \, dx = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac12(\partial_x u)(\partial_x\bar u) + \frac14 \alpha u^2\bar u^2 \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\partial_x\partial_t u)(\partial_x \bar u) + (\partial_x u)(\partial_x\partial_t\bar u) + \frac12\alpha u\bar u^2\partial_t u + \frac12\alpha u^2\bar u\,\partial_t\bar u \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \partial_x(-i\partial_x^2 u + \alpha i u^2\bar u)(\partial_x\bar u) + (\partial_x u)(\partial_x(i\partial_x^2\bar u - i\alpha\bar u^2 u))$$
$$+ (-i\partial_x^2 u + \alpha i u^2\bar u)(\tfrac12\alpha u\bar u^2) + (i\partial_x^2\bar u - i\alpha\bar u^2 u)(\tfrac12\alpha u^2\bar u) \, dx$$

$= 0$

- $H(u)$ ist wohldefiniert in H^1 wegen

$$|H(u)| \leq \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{C^0}^2 \, \|u\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|u\|_{H^1}\right)$$

- $H(u)$ ist positiv definit, d.h. $H(u) > 0$ für alle $u \neq 0$, im defokussierenden Fall und indefinit im fokussierenden Fall.

<u>Theorem 4.2:</u>
Für $u \in H^1(\mathbb{R})$ existiert eine globale Lösung der NLS-Gl. in $H^1(\mathbb{R})$ mit $u|_{t=0} = u_0$.

<u>Beweis:</u>
Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \|u\|_{L^2}^2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} u\bar{u} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_t u \, \bar{u} + u \, \partial_t \bar{u} \, dx$$

$$= 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \bar{u}\left(-i\left(\partial_x^2 u - \alpha |u|^2 u\right)\right) dx$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$$

Außerdem haben wir $H(u(t)) = H(u_0)$.
Im defokussierenden Fall erhalten wir daraus

$$\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 = \|u(t)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u(t)\|_{L^2}^2$$

$$\leq \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\, H(u(t))$$

$$\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2\, H(u_0)$$

$$\leq \tilde{C}\left(\|u_0\|_{H^1}^2\right),$$

wobei $\tilde{C}$ unabhängig von t ist. Für alle $t \geq 0$ ist also die H^1-Norm von u glm. beschränkt.
Im fokussierenden Fall müssen wir die räumliche Eindimensionalität ausnutzen. Mit Hilfe der (~~[illegible]~~) Gagliardo-Nirenberg Interpolations-Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{q+1} \, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx\right)^{(2(q+1) - d(q-1))/4} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx\right)^{d(q-1)/4}$$

für $q=3$, $\underline{d=1}$ ergibt sich dann

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^4\,dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^2\,dx\right)^{3/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t)|^2 dx \leq \overbrace{H(u(t))}^{=H(u_0)} + \frac{1}{4}\overbrace{\|u(t)\|_{L^2}^{3/2}}^{=\|u_0\|_{L^2}^{3/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t)|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t)|^2\,dx \quad \text{ist glm. beschränkt für alle } t>0.$$

Für alle $t \geq 0$ ist also in diesem Fall die H^1-Norm von u glm. beschränkt. Dadurch können wir den Beweis des lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatzes wiederholt anwenden (das resultierende lokale Existenzintervall ist durch die H^1-Norm bestimmt) und erhalten damit die globale Existenz.

<u>Bem:</u>

Für $x \in \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ existieren Lösungen der NLS-Gl.

$$\partial_t u = -i\,\Delta u - i\,|u|^2 u$$

mit $\exists T>0 : \|u(t)\|_{H^1} \xrightarrow{t\to T} \infty$.

<u>Die Methode der stationären Phase</u>

Bei dispersiven Gleichungen (wie z.B. der Schrödingergl.) müssen häufig Integrale der Form

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(k)\, e^{ikx} e^{i\omega(k)t}\, dk \qquad (*)$$

berechnet werden.

Sei im Folgenden $x \in \mathbb{R}$ fest.

Gilt $\omega'(k_0) \neq 0$ für ein $k_0 \in \mathbb{R}$, dann liegen für $t \to \infty$ für $e^{i\omega(k)t}$ immer stärkere Oszillationen in k-Richtung vor, ~~mit~~ wegen $e^{i\omega(k)t} \approx e^{i(\omega(k_0)+\omega'(k_0)(k-k_0))t}$ für k nahe k_0 und damit können wir erwarten:

$$\int_{I_{k_0}} \hat{u}_0(k)\, e^{ikx} e^{i\omega(k)t}\, dk \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

wobei I_{k_0} eine Umgebung von k_0 ist. Dagegen ist für den Fall $\omega'(\tilde{k}_0)=0$ in der Nähe von $\tilde{k}_0$ die Fkt. $e^{i\omega(k)t} \approx e^{i\omega(\tilde{k}_0)t}$ und solche Umgebungen liefern d. Haupt-

<u>Theorem 4.3:</u>

Sei $a<b$ und $f, \phi \in \mathcal{C}^2([a,b])$ mit

$$\phi'(k_0) = 0, \ \phi''(k_0) \neq 0.$$

und

$$\phi'(k) \neq 0$$

für $k \neq k_0$. Dann gilt für $t \longrightarrow \infty$

$$\int_a^b f(k) e^{it\phi(k)}\, dk = \sqrt{\frac{2\pi}{t\,|\phi''(k_0)|}}\; f(k_0) e^{i(t\phi(k_0) + \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\phi''(k_0))} + O(t^{-1})$$

<u>Beweis:</u>

Es genügt, den Fall $k_0 = 0$ und $\phi(k) = k^2$ zu betrachten (allg. argumentiert dann mit dem Satz von Taylor).

Wir zeigen zunächst:

Sei $[c,d] \subset [a,b]$ und $|\phi'(k)| \geq C > 0$ in (c,d). Dann gilt

$$\int_c^d f(k) e^{it\phi(k)}\, dk = O(t^{-1}) \quad \text{für } t \longrightarrow \infty.$$

$$\left| \int_c^d f e^{it\phi}\, dk \right| = \left| \int_c^d \frac{f}{\phi'} (\phi' e^{it\phi})\, dk \right| = \left| \frac{1}{it} \left(\frac{f}{\phi'} e^{it\phi} \Big|_c^d \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int \frac{f'\phi' + f\phi''}{(\phi')^2} e^{it\phi}\, dk \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{Ct}\left(|f(d)| + |f(c)| + \frac{1}{C}\int_c^d |f'\phi' - f\phi''|\, dk \right)$$

$$\leq \tilde{C}\, t^{-1}$$

Es genügt daher

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(k) e^{it\phi}\, dk$$

für ε hinr. klein zu betrachten. Wir schreiben $f(k) = f(0) + \frac{f(k) - f(0)}{k} k =: f(0) + q(k)k$

wobei wegen $f \in C^2$ die Ableit. q' in $[-\varepsilon, \varepsilon]$ beschränkt ist. Dann gilt

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(k) e^{it\phi(k)}\, dk = 2 f(0) e^{it\phi(0)} \int_0^{\varepsilon} e^{itk^2}\, dk + e^{it\phi(0)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(k) k e^{itk^2}\, dk .$$

Durch part. Integration erhält man, dass das zweite Integral $O(t^{-1})$ für $t \to \infty$ ist. Beim ersten Integral substituieren wir

$$tk^2 = y^2$$

und erhalten

$$\int_0^{\varepsilon} e^{ik^2 t}\, dk = \int_0^{\varepsilon\sqrt{t}} e^{iy^2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{i\frac{\pi}{4}} + o(\varepsilon t^{-1})$$

und damit die Behauptung.

■

Bem.:

a) Das Theorem gilt auch für $a = -\infty$, $b = +\infty$, wenn zusätzlich angenommen wird, dass f beschränkt, $|\phi'(k)| \geq C > 0$ außerhalb einer Umgebung von k_0 und

$$\int_{\mathbb{R}} |f'\phi' - f\phi''| / |\phi'|^2\, dk < \infty$$

ist.

b) Für $\phi(k) = k^3$ kann man analog zeigen

$$\int_a^b f(k) e^{it\phi(k)}\, dk \leq C f(0) t^{-\frac{1}{3}},$$

falls $a < 0 < b$ ist.

c) Mit Hilfe von (b) kann man für Lösungen der Airygleichung

$$\partial_t u = \partial_x^3 u$$

zeigen, dass

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x,t)| \leq C t^{-1/3} \int |u(y,0)|\, dy$$

gilt.