5. Die KdV-Gleichung

Die Gleichung

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u + 6u\,\partial_x u \qquad (1.)$$

mit $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, u(x,t) \in \mathbb{R}$ heißt ~~Korteweg~~ Korteweg-de-Vries-Gleichung (KdV-Gl.). Durch Reskalieren von x, t und u können beliebige andere Werte für die Koeffizienten auf der rechten Seite erzielt werden.

Solitärwellen-Lösungen der KdV-Gl.:

Setze den Ansatz

$$u(x,t) = v(x-ct) = v(\xi) \quad , c > 0$$

in (1.) ein. Dies liefert eine ODE

$$-cv' = -v''' + 6vv', \qquad ' := \frac{d}{d\xi}$$

Integration bzgl. ξ liefert dann

$$-cv + v'' - 3v^2 = D \quad \text{mit } D \in \mathbb{R}.$$

Fordern wir zusätzlich

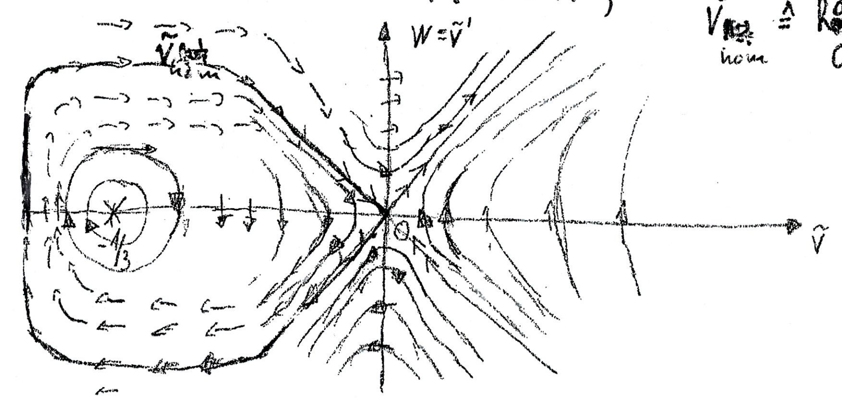
$$\lim_{|\xi| \to \infty} v(\xi) = 0, \quad \lim_{|\xi| \to \infty} v''(\xi) = 0,$$

dann folgt $D = 0$.

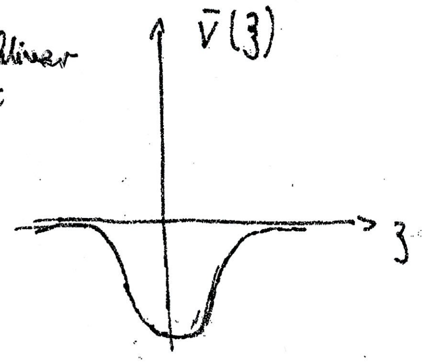
Durch Reskalieren $\tilde{\xi} = c^{-1/2}\xi$ und $\tilde{v} = c^{-1} \cdot v$ ergibt sich

$$\tilde{v}' = w, \qquad ' := \frac{d}{d\tilde{\xi}}$$

$$w' = \tilde{v} + 3\tilde{v}^2 = \tilde{v}(1 + 3\tilde{v}),$$



$\tilde{v}_{hom}$ ≙ ~~Homo~~ Homokliner Orbit



Linearisierung um $(0,0)$ ist

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_{Lin} \\ W_{Lin} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} W_{Lin} \\ \tilde{V}_{Lin} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V}_{Lin} \\ W_{Lin} \end{pmatrix}. \quad \lambda_1 = +1 \quad \lambda_2 = -1$$

Sie besitzt die EW $\lambda_{1/2} = \pm 1$ und die EV $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Linearisierung um $(-1/3, 0)$ besitzt zwei rein imaginäre, zu einander konjungierte EW.
Drücken wir den homoklinen Orbit $\tilde{V}_{hom}$ in den ursprünglichen Variablen aus, dann erhalten wir eine Familie von Solitärwellenlösungen.

$$u(x,t) = c\, \tilde{V}_{hom}(\sqrt{c}\,(x - ct)).$$

Wir erkennen: Je höher (tiefer) die Welle, desto schmaler die Welle und desto schneller ist die Welle.

Es gibt eine explizite Darstellung:

$$u(x,t) = -2c\, \operatorname{sech}^2(\sqrt{c}\,(x - 4ct)) \qquad c > 0$$

Ist exakte Lösung der KdV-Gleichung.

<u>Bem.:</u>
Die KdV-Gl. besitzt darüber hinaus auch N-Soliton-Lösungen $A_{N\text{-}Sol.}$ mit

$$A_{N\text{-}Sol.}(x,t) \sim \sum_{j=1}^{N} A_{\beta_j}(x - \beta_j^2 t \pm \gamma_j + \delta_j)$$

für $t \to \pm\infty$ mit $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_N;\ \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R}$.
Dabei bedeutet $u \sim v$, dass

$$|(u(x,t) - v(x,t))e^{|x|}| \xrightarrow{|x| \to \infty} 0.$$

Die Lösung besteht aus N Solitärwellen. Diese Solitärwelle können sich durchdringen, d.h. sie behalten nach der Durchdringung ihre Form bei (zumindest asymptotisch).

<u>Die KdV-Gl. als Hamiltonsches System:</u>

Sei

$$H(u(t)) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2} (\partial_x u(x,t))^2 + u(x,t)^3 \, dx$$

Dann gilt:

$$\partial_u H(u)[v] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H(u + \varepsilon v) - H(u)}{\varepsilon} \ \textcircled{=}$$

$$\stackrel{=}{} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} (\partial_x(u+\varepsilon v))^2 + (u+\varepsilon v)^3 - \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 - u^3 \, dx.$$

Daher gilt

$$\beta \partial_u H(u) = -\partial_x^2 u + 3u^2$$

[Zur Def. von β siehe Kap. über NLS-Gl.].

Wir erkennen

$$\partial_t u = -\partial_x^3(u^2) + 3\partial_x(u^2) = \partial_x \beta \partial_u H(u)$$
$$= J \beta \partial_u H(u),$$

wobei $J = \partial_x$ ein schiefsymm. Operator in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$\int (\partial_x u) v \, dx = -\int u \partial_x v \, dx$$

H ist eine Erhaltungsgröße von Lösungen der KdV-Gl. also $\frac{d}{dt} H(u(t)) = 0$.

05.06.12 ①

<u>Erhaltungsgrößen der KdV-Gleichung:</u>

Die KdV-Gl. besitzt unendl. viele Erhaltungsgrößen T_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$T_1(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, dx$$

$$\frac{d}{dt} T_1(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x(-\partial_x^2 u(x,t) + 3u^2(x,t))\, dx$$
$$= -\partial_x^2 u(x,t) + 3u^2(x,t) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$
$$= 0$$

falls $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} \partial_x^2 u(x,t) = 0$

$$T_2(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)\, dx$$

$$\frac{d}{dt} T_2(t) = \int_{\mathbb{R}} u\, \partial_t u \, dx = \int_{\mathbb{R}} u(-\partial_x^3 u + 3\partial_x u^2)\, dx$$
$$\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \partial_x\left(\frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + 2u^3\right) dx = 0$$

$$T_3(t) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2}\left(\partial_x u(x,t)\right)^2 + \left(u(x,t)\right)^3 \, dx$$

$$\partial_t \left(u^3 + \tfrac{1}{2}(\partial_x u)^2\right) = -\partial_x \left(-\tfrac{9}{2}u^4 + 3u^2\partial_x^2 u - 6u(\partial_x u)^2 + (\partial_x u)(\partial_x^3 u) - \tfrac{1}{2}(\partial_x^2 u)^2\right)$$

$$T_4(t) = 5u^4 + 10u(\partial_x u)^2 + (\partial_x^2 u)^2$$

$$T_5(t) = 21u^5 + 105u^2(\partial_x u)^2 + 21u(\partial_x^2 u) + (\partial_x^3 u)^2$$

$\vdots$

Diese Erhaltungsgrößen können auch mit Hilfe der sogenannten Miura-Gardner Transformation gefunden werden.

Für gegebenes $u = u(x,t)$ definiere $w(x,t)$ implizit durch

$$u(x,t) = w(x,t) + i\varepsilon\, \partial_x w(x,t) + \varepsilon^2 (w(x,t))^2.$$

Für hinreichend glattes u und hinreichend kleines ε kann die obige Formel invertiert werden. Man erhält

$$w = u - i\varepsilon \partial_x u - \varepsilon^2(u^2 + \partial_x^2 u) + i\varepsilon^3(\partial_x^3 u + 4u\,\partial_x^2 u) + \varepsilon^4\left(2u^3 + 5(\partial_x u)^2 + 6u\,\partial_x^2 u + \partial_x^4 u\right) + O(\varepsilon^5) \qquad (\circ)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x^3 u - 6u\,\partial_x u = {} & \partial_t w - 6w\,\partial_x w - 6\varepsilon^2 w^2 \partial_x w + \partial_x^3 w \\ & + 2\varepsilon^2 w\left(\partial_t w - 6w\partial_x w - 6\varepsilon^2 w^2 \partial_x w + \partial_x^3 w\right) \\ & + i\varepsilon\, \partial_x\left(\partial_t w - 6w\partial_x w - 6\varepsilon^2 w^2 \partial_x w + \partial_x^3 w\right). \end{aligned}$$

Wenn also w die Dgl.

$$\partial_t w = -\partial_x^3 w + 6w\,\partial_x w + 6\varepsilon^2 w^2 \partial_x w \qquad (\Diamond)$$

löst, dann löst u die KdV-Gleichung.

$$I_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} w(x,t)\, dx$$

ist eine Erhaltungsgröße von $(\Diamond)$ für alle ε.

Entwickeln wir w gemäß $(\circ)$ als Potenzreihe bzgl. ε, dann müssen die Integrale der Koeff. dieser Entwicklung ebenfalls Erhaltungsgrößen sein. Wir erhalten als Erhaltungsgrößen

1.) $K_0 = \int_{\mathbb{R}} u \, dx = T_1$

2.) $K_1 = \int_{\mathbb{R}} \partial_x u \, dx = 0$

(3.) $K_2 = \int_{\mathbb{R}} u^2 + \partial_x^2 u \, dx = \int_{\mathbb{R}} u^2 \, dx = T_2$

(4.) $K_4 = \int_{\mathbb{R}} 3u^2 + 5(\partial_x u)^2 + 6u\, \partial_x^2 u + \partial_x^4 u \, dx$

part. Int.

$= \int_{\mathbb{R}} 2u^3 - (\partial_x u)^2 \, dx$ $\rightarrow$ ~~[illegible]~~

(5.) $K_3 = \int_{\mathbb{R}} 4u(\partial_x^2 u)\, dx \overset{\text{part. Int.}}{=} -\int 4(\partial_x u)^2 \, dx$

$\hookrightarrow -\frac{1}{4} K_3 + \frac{1}{2} K_4 = T_3$

Die Lax-Paar Formulierung:

Schreibe KdV-Gl. als abstraktes System

- nicht linearer Operator

$$\partial_t u = N(u) \qquad (1.)$$

(d.h. $N(u) = -\partial_x^3 u + 6u\partial_x u$)

Interpretiere die linke & rechte Seite von (1.) als Multiplikationsoperator

$$\partial_t u : L^2 \longrightarrow L^2, \quad \psi \longmapsto (\partial_t u)\psi$$

$$N(u) : L^2 \longrightarrow L^2, \quad \psi \longmapsto N(u)\psi$$

Ziel: Schreibe (1.) als Evolutionsgleichung für Operatoren von der Form

$$\partial_t L = [M, L] = ML - LM,$$

wobei L ein selbstadjungiertes Operator ist, d.h. $L = L^*$ und M ein schiefsymmetrischer Operator, d.h. $M = -M^*$ ist.

Sei $L = -\partial_x^2 + u(x,t)$, d.h. $L\psi(x,t) = -\partial_x^2 \psi(x,t) + u(x,t)\psi(x,t)$.

$$L(t)\psi(x) = -\partial_x^2 \psi(x) + u(x,t)\psi(x)$$

Dann ist

$$\partial_t L = \partial_t u$$

Lemma 5.1:
Sei $L = L(t)$ selbstadjungiert und $\partial_t L = [M, L]$ mit M schiefsymmetrisch, dann sind die Eigenwerte von L unabhängig von t.

Beweis:

Differentation der Eigenwertgleichung

$$L(t)\Psi(t) = \underbrace{\lambda(t)}_{\in\mathbb{R}}\Psi(t)$$

bzgl. t liefert

$$\partial_t L(t)\Psi(t) + L(t)\partial_t\Psi(t) = \partial_t\lambda(t)\Psi(t) + \lambda(t)\partial_t\Psi(t)$$

Ausnützen der Kommutatorrelation liefert

$$\partial_t\lambda(t)\Psi(t) = (M(t)L(t) - L(t)M(t))\Psi(t) + L(t)\partial_t\Psi(t) - \lambda(t)\partial_t\Psi(t)$$

$$= M(t)\lambda(t)\Psi(t) - L(t)M(t)\Psi(t) + L(t)\partial_t\Psi(t) - \lambda(t)\partial_t\Psi(t)$$

$$= (L(t) - \lambda(t))(\partial_t\Psi(t) - M(t)\Psi(t)).$$

Mit der Voraussetzung von $L = L^*$ und mit der Normierung $\langle\Psi,\Psi\rangle_{L^2} = 1$ erhalten wir

$$\partial_t\lambda(t) = \langle\Psi(t), (L(t)-\lambda(t))(\partial_t\Psi(t) - M(t)\Psi(t))\rangle_{L^2}$$

$$= \langle(L(t)-\lambda(t))\Psi(t), \partial_t\Psi(t) - M(t)\Psi(t)\rangle_{L^2}$$

$$= \langle 0, \partial_t\Psi(t) - M(t)\Psi(t)\rangle_{L^2}$$

$$= 0$$

Sei

$$\partial_t L = [M, L]$$

11.06.12

(1)

mit $L = L(t)$ selbstadjungiert und M schiefsymmetrisch.

Lemma 5.2:

Es gelten die obigen Voraussetzungen. Außerdem seien alle Eigenwerte von $L(0)$ einfach. Dann existiert $c(t)$, so dass die Eigenfunktion Ψ die Evolutionsgleichung

$$\partial_t\Psi(t) = (M(t) + c(t))\Psi(t)$$

erfüllen. Insbesondere kann man wegen

$$[M(t), L(t)] = M(t)L(t) - L(t)M(t) = (M(t) - c(t))L(t) - L(t)(M(t) - c(t))$$

den Operator so umdefinieren, dass

$$\partial_t\Psi(t) = M(t)\Psi(t)$$

gilt

Beweis:

Aus dem Beweis von Lemma 5.1 folgt,

$$(L(t)-\lambda(t))(\partial_t \Psi(t) - M(t)\Psi(t)) = \partial_t \lambda(t)\,\Psi(t)$$
$$= 0.$$

Da λ ein einfaches EW ist, muss $\partial_t \Psi - M\Psi$ ein Vielfaches von Ψ sein.
Somit $\exists\, c(t)$:

$$\partial_t \Psi(t) - M(t)\Psi(t) = c(t)\Psi(t)$$

$\blacksquare$

Wir haben bereits

$$L\cdot = -\partial_x^2 \cdot + u(x,t)\cdot,$$

wobei u Lösung der KdV-Gl. ist.
Wir suchen nun einen schiefsym. Operator M mit

$$\big(M(\partial_x,x,t)\,L(\partial_x,x,t)) - L(\partial_x,x,t)\,M(\partial_x,x,t)\big)\varphi(x,t)$$
$$= \big(-\partial_x^3 u(x,t) + 6u(x,t)\,\partial_x u(x,t)\big)\varphi(x,t).$$

__1. Versuch:__ $M = \partial_x$

$$[M,L]\varphi(x,t) = \partial_x\big(-\partial_x^2 + u(x,t)\big)\varphi(x,t) - \big(-\partial_x^2 + u(x,t)\big)\partial_x\varphi(x,t)$$
$$= (\partial_x u(x,t))\,\varphi(x,t)$$

Für ein so gewähltes M wäre

$$\partial_t L = [M,L]$$

die Transportgleichung

$$\partial_t u = \partial_x u.$$

Nehmen wir für u in der Def. von L die Lösung der KdV-Gl., sondern die Lösung der Transportgleichung, dann bekommen wir mit $M = \partial_x$ eine Lax-Paar-Darstellung der Transportgleichung. Die Eigenfunktionen Ψ von L erfüllen

$$\partial_t \Psi(x,t) = \partial_x \Psi(x,t)$$

also gilt $\Psi(x,t) = \Psi_0(x+t)$, wobei $\varphi(x,0) = \Psi_0(x)$ ist.

2. versuch: $M = -\alpha \partial_x^3 + U \partial_x \cdot + \partial_x (U \cdot) + A$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $U = U(x,t)$, $A = A(x,t)$.

$$[M,L]\cdot = \left(-\alpha \partial_x^3 + \partial_x^3 U + \partial_x^2 A + 2(\partial_x u) U - 3\alpha \partial_x^2 u + 4 \partial_x^2 U + 2\partial_x A\right)\partial_x \cdot$$

$$- \left(-3\alpha \partial_x u + 4 \partial_x U\right)\partial_x^2 \cdot$$

$$\overset{!}{=} \left(-\partial_x^3 u(x,t) + 6 u(x,t)\, \partial_x u(x,t)\right)\cdot$$

$$\Rightarrow \alpha = 4, \; U = \frac{3\alpha}{4} u = 3u, \; A = A(t).$$

ie Eigenfunktionen von L erfüllen dann

$$\partial_t \Psi = -4 \partial_x^3 \Psi + 3u\, \partial_x \Psi + 3 \partial_x (u\Psi) + A\Psi.$$

Bem.:

Wählt man

$$M\varphi = -\alpha \partial_x^5 \varphi + u \partial_x \varphi + (\partial_x u)\varphi + u \partial_x^3 \varphi + (\partial_x^3 u)\varphi,$$

dann erhält man eine Lax-Paar-Darstellung von

$$\partial_t u = -\partial_x^5 u + 10 u\, \partial_x^3 u + 20 (\partial_x u)(\partial_x^2 u) - 30 u^2 \partial_x u.$$

ieses Verfahren lässt sich fortsetzen. Man erhält dadurch eine abzählbar unendliche ierarchie von Evolutionsgleichungen mit Lax-Paar-Darstellung.

Diese Evolutionsgleichungen besitzen Hamiltonfunktionen, wobei die Hamiltonfkt. der n-ten Evolutionsgleichung mit der n-ten Erhaltungsgröße der KdV-Gl., welche über die Miura-Trafo gewonnen wird, übereinstimmt.

Ziel:

Rekonstruktion der Lösung u der KdV-Gleichung aus den EW λ und den Eigenfunktionen Ψ von

$$-\partial_x^2 \Psi + u\Psi = \lambda \Psi. \qquad (\diamond)$$

ir wissen

$$\partial_t \lambda = 0$$

$$\partial_t \Psi = -4 \partial_x^3 \Psi + 3u\, \partial_x \Psi + 3 \partial_x (u\Psi) + A(t)\Psi$$

$$= 2(u + 2\lambda)\partial_x \Psi - (\partial_x u)\Psi + A(t)\Psi.$$

r wollen erreichen dass sich die Eimdukionsgl. für Ψ so umschreiben lässt dass sie unabhängig von μ ist.

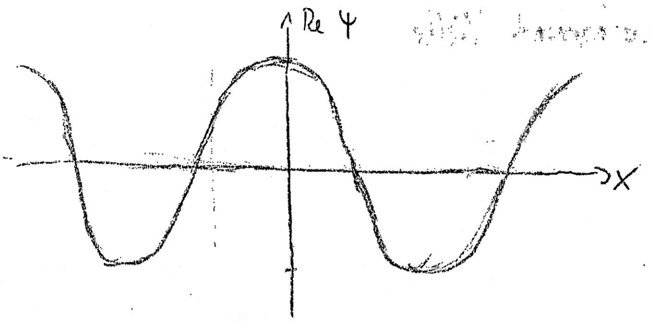
Dazu untersuchen wir zunächst den EW von ($\diamond$).

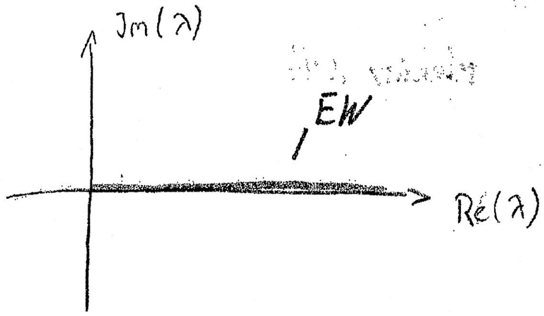
Betrachte zuerst den Spezialfall $u = 0$, also

$$-\partial_x^2 \psi = \lambda \psi$$

EW: $\lambda = k^2$ f.a. $k \in \mathbb{R}$

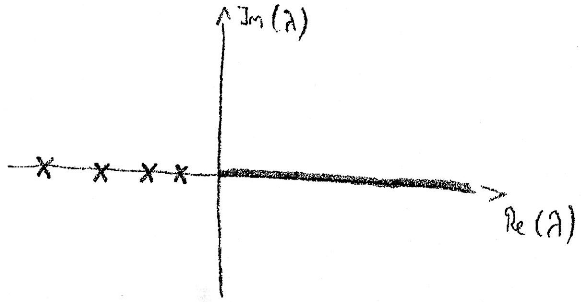
Eigenfkt.: $\psi(x) = c e^{ikx}$, $c \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)





Betrachte nun $u \neq 0$ mit $\lim_{|x| \to \infty} u(x,t) = 0$.

Dann besitzt ($\diamond$) ein Kontinuum von Eigenwerten $\lambda(k) = k^2$, $k \in \mathbb{R}$ und zusätzlich, gibt es N diskrete EW $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_N$.

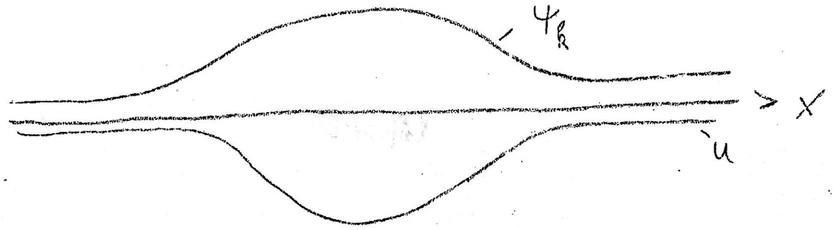


Die Eigenfkt-en sind vollständig bestimmt durch ihr asymptotisches Verhalten für $|x| \to \infty$. Für die Eigenfkt. ψ_k zu λ_k mit der Normierung

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_k(x)|^2 \, dx = 1$$

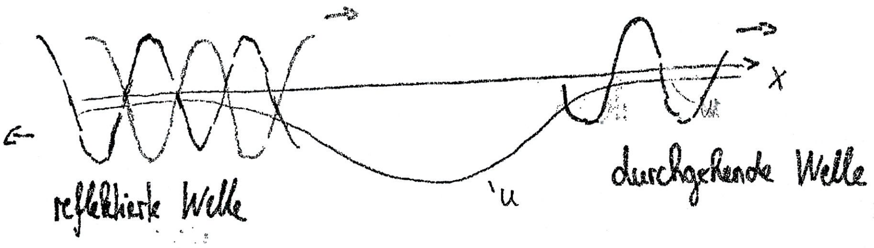
gilt

$$\psi_k \sim c_k \begin{cases} e^{-\varkappa_k x} & x \to \infty \\ e^{\varkappa_k x} & x \to -\infty \end{cases} , \quad \varkappa_k^2 = -\lambda_k$$



Für die Eigenfkt. $\psi(k)$ zu $\lambda(k)$ gilt

$$\Psi(k) \sim \begin{cases} \underline{e^{-ikx} + b(k) e^{ikx}} & , x \to \infty \\ \underline{a(k) e^{-ikx}} & , x \to -\infty \end{cases}$$



Sämtliche Eigenfkt.-en sind also durch c_k, $b(k)$ und $a(k)$ eindeutig bestimmt, wobei sogar $b(k)$ durch $a(k)$ bestimmt ist.
Berechne daher anstelle der Evolutionsgl. für ψ_k, $\Psi(k)$ Evolutionsgl. für c_k und $b(k)$.

12.05.12
①

$$-\partial_x^2 \Psi(x,t) + u(x,t)\Psi(x,t) = \lambda(t)\Psi(x,t)$$

$$(\Delta) \left[\begin{array}{lll} (\lambda_k(t), c_k(t)) & k = 1, \dots, N & \\ (\lambda(k,t), b(k,t)) & k \in \mathbb{R} & \lambda(k) = k^2 \end{array} \right.$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_k(t) = \frac{d}{dt}\lambda(k,t) = 0$$

Es gilt außerdem:

$$\frac{d}{dt} c_k = 4\varkappa_k^3 c_k \qquad \text{mit} \qquad \varkappa_k^2 = -\lambda_k \geq 0$$

$$\frac{d}{dt} b(k) = -8ik^3 b(k). \quad \Rightarrow \quad b(k,t) = b(k,0)e^{8ik^3 t}$$

Herleitung der Evolutionsgl. für c_k:

Sei ψ_k Eigenfkt. zu λ_k mit $\int_{\mathbb{R}} \psi_k^2 \, dx = 1$. Dann gilt unter Verwendung d. Eigensch. von M:

$$\psi_k \left(\partial_t \psi_k + (\partial_x u)\psi_k - 2u\,\partial_x \psi_k - 4\lambda_k \partial_x \psi_k \right) = A(t)\psi_k^2$$

$$\Leftrightarrow \partial_t\left(\tfrac{1}{2}\psi_k^2\right) + \underbrace{\partial_x\left(u\psi_k^2 - 2(\partial_x\psi_k)^2 - 4\lambda_k\psi_k^2\right)}_{(*)} = A(t)\psi_k^2 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\begin{aligned} (*) &= \partial_x u\,\psi_k^2 + 2u\,\psi_k\partial_x\psi_k - 4\,\partial_x\psi_k\,\partial_x^2\psi_k - 8\lambda_k\psi_k\partial_x\psi_k \\ &= (\partial_x u)\psi_k^2 + 2u\,\psi_k\partial_x\psi_k - 4\partial_x\psi_k(u - \lambda_k)\psi_k - 8\lambda_k\psi_k\partial_x\psi_k \\ &= \psi_k\left((\partial_x u)\psi_k + 2u\,\partial_x\psi_k - 4\,\partial_x\psi_k(u - \lambda_k) - 8\lambda_k\partial_x\psi_k\right) \end{aligned}$$

Aus (I) folgt

$$\underbrace{\partial_t \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \psi_k^2 \, dx}_{=1} \Big)}_{=0} = A(t) \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \psi_k^2 \, dx}_{=1} \Big)$$

$\Rightarrow A(t) = 0.$

Damit folgt dann

$$\partial_t \psi_k + (\partial_x u)\psi_k - 2(u - 2\lambda_k)\partial_x \psi_k = 0. \qquad (II)$$

Die Asymptotik von ψ_k für $x \longrightarrow \infty$:

$$\psi_k(x,t) = c_k(t) e^{-\kappa_k x} + \text{h.o.T.} \quad , \quad \lambda_k = -\kappa_k^2 = \text{const. unabh. von } t$$

h.o.T $\hat{=}$ höhere Ordnungsterme

$$\overset{(II)}{\rightsquigarrow} \frac{d}{dt} c_k(t) e^{-\kappa_k x} + \text{h.o.T.} + (\partial_x u)(c_k(t)e^{-\kappa_k x} + \text{h.o.T})$$

$$- 2u(-\kappa_k)(c_k(t)e^{-\kappa_k x} + \text{h.o.T}) + 4\lambda_k(-\kappa)c_k(t)e^{-\kappa_k x} + \text{h.o.T}$$

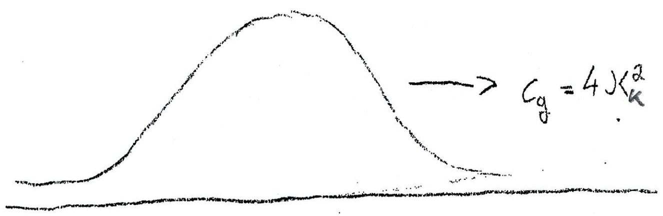
$$= 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt} c_k(t) + 4\lambda_k(-\kappa)c_k(t) + \text{h.o.T} = 0$$

$$= \frac{d}{dt} c_k(t) - 4\kappa_k^3 c_k(t) + \cancel{\text{h.o.T}} = 0$$

somit $c_k(t) = c_k(0) e^{4\kappa_k^3 t}$

$$\Rightarrow \psi_k(x,t) \sim \underbrace{c_k(t) e^{-\kappa_k x}}_{= c(0) e^{-\kappa_k(x - 4\kappa_k^2 t)}} \qquad x \longrightarrow \infty$$



Berechnung von $u(x,t)$ aus den Daten (Δ):

Es gilt:

$$u(x,t) = -2 \frac{d}{dx} K(x,x,t),$$

wobei $K(x,z,t)$ die sog. Marchenko-Gl. (oder Gelfand-Levitan-Gl.).

$$K(x,z,t) + F(x+z,t) + \int_x^\infty K(x,y,t) F(y+z,t)\, dy = 0$$

mit

$$F(x,t) = \sum_{j=1}^{N} c_j^2(t) e^{-\varkappa_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \, b(k,t) \, dk$$

Zusammenfassung des gesamten Vorgehens:

Anfangsbed. für KdV-Gl. $u(x,0) = u_0(x)$

↓ Streutransformation

Berechne die Streudaten $N, \lambda_k(0), \lambda(k,0), c_k(0), b(k,0)$

→ lineare Dgl. für $c_k, b(k)$

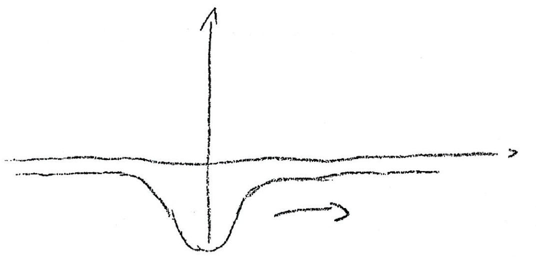
Streudaten zur Zeit t $N, \lambda_k(0), \lambda(k,0), c_k(t), b(k,t)$

↑ Verwende Marchenko-Gl. / Inverse Streutrafo.

Lösung der KdV-Gl. zur Zeit t $u(x,t)$

Beispiele:

(1) 1-Soliton (Solitärwellenlösung)



Anfangsbedingung (Solitärwellenprofil zur Zeit 0) liefert:

$N = 1, \; \lambda_1 = -1 \quad , c_1(0) = \sqrt{2}$

$\lambda(k) = k^2, \; k \in \mathbb{R}, \; b(k,0) = 0 \Rightarrow b(k,t) = 0$

Aus $\lambda_1 = -1$ folgt $\varkappa_1 = 1$

$\Rightarrow c_1(t) = e^{4t} c_1(0)$

Insgesamt folgt mit F

Daten eingesetzt

$$F(x,t) = \sum_{j=1}^{N} c_j^2(t) e^{-\varkappa_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} b(k,t)\, dk \overset{!}{=} 2e^{8t} e^{-x}$$

Marchenko

$$\Rightarrow K(x,z,t) + 2e^{8t-(x+z)} - \int_x^{\infty} K(x,y,t)\, 2 e^{8t-(y+z)}\, dy = 0$$

Wähle Ansatz: $K(x,z,t) = L(x,t) e^{-z}$

$$\Rightarrow L(x,t) + 2e^{8t-x} + 2L(x,t) e^{8t} \int_x^{\infty} e^{-2y} \, dy = 0$$

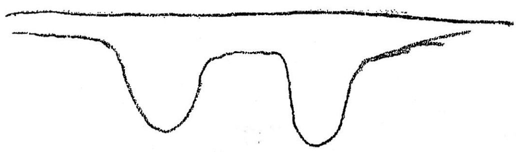
$$\Rightarrow L(x,t) = \frac{-2e^{8t-x}}{1+e^{8t-2x}}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = -2\frac{d}{dx}\left(L(x,t)e^{-x}\right)$$

$$= -2\frac{d}{dx}\left(\frac{-2e^{8t-2x}}{1+e^{8t-2x}}\right)$$

$$= -\frac{8e^{2x-8t}}{(1+e^{2x-8t})^2} = -2\,\mathrm{sech}^2(x-4t)$$

(2.) 2-Solitonen



Streudaten:

$\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 2$, $N = 2$

$c_1(0) = \sqrt{6}$, $c_2(0) = 2\sqrt{3}$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$

$b(k,0) = 0 \Rightarrow b(k,t) = 0$

Also folgt:

$$c_1(t) = \sqrt{6}\,e^{4t}, \quad c_2(t) = 2\sqrt{3}\,e^{32t}$$

$$F(x,t) = 6e^{8t}e^{-x} + 12e^{64t}e^{-2x}$$

Marchenko-Gl:

$$K(x,z,t) + 6e^{8t-(x+z)} + 12e^{64t-2(x+z)} + \int_x^\infty K(x,y,t)\left(6e^{8t-(\cancel{z}+y)} + 12e^{64t-2(\cancel{z}+y)}\right)dy = 0$$

Ansatz: $K(x,z,t) = L_1(x,t)e^{-z} + L_2(x,t)e^{-2z}$

$$\Rightarrow \quad L_1 + 6e^{8t-x} + 6e^{8t}\left(L_1\int_x^\infty e^{-2y}\,dy + L_2\int_x^\infty e^{-3y}\,dy\right) = 0$$

$$L_2 + 12e^{64t-2x} + 12e^{64t}\left(L_1\int_x^\infty e^{-3y}\,dy + L_2\int_x^\infty e^{-4y}\,dy\right) = 0$$

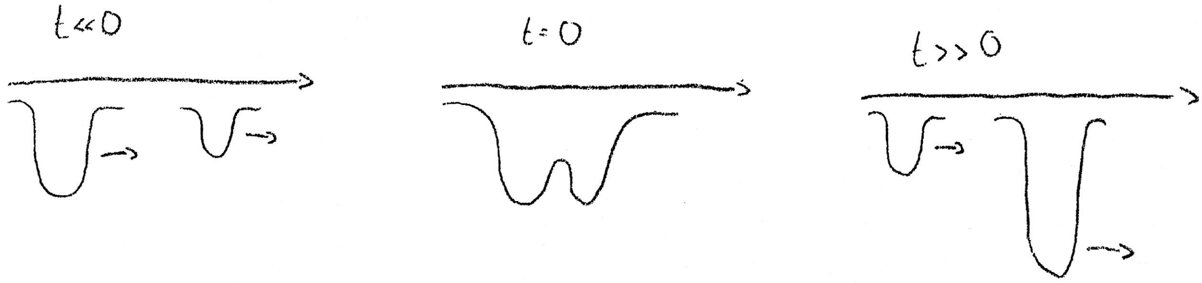
$$\Rightarrow L_1(x,t) = 6\left(e^{72t-5x} - e^{8t-x}\right)\Big/ D$$

$$L_2(x,t) = -12\left(e^{64t-2x} + e^{72t-4x}\right)\Big/ D$$

$$D(x,t) = 1 + 3e^{8t-2x} + 3e^{64t-4x} + e^{72t-6x}$$

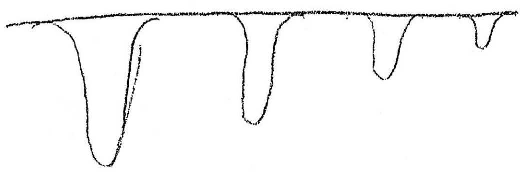
$$u(x,t) = -2\,\frac{d}{dx}\left(L_1(x,t)e^{-x} + L_2(x,t)e^{-2x}\right)$$

$$= -12\,\frac{3 + 4\cosh(2x-8t) + \cosh(4x-64t)}{\left(3\cosh(x-28t) + \cosh(3x-36t)\right)^2}$$



(3.) N Solitonen als Anfangsprofil

18.06.12
1



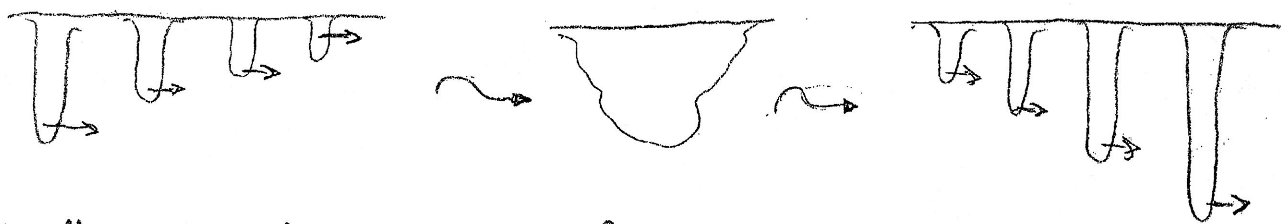
> Jedes Soliton liefert einen diskreten EW von

$$\partial_x^2 \varphi + u_0 \varphi = \lambda \varphi$$

und es ist wiederum $b(k,0) = 0$.

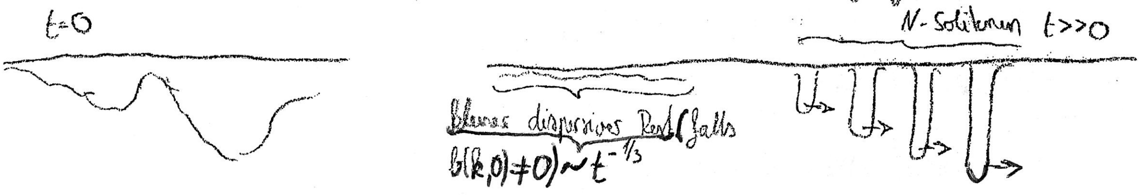
Gehe vor wie bei der 1.- und 2.-Solitonen

Erhalte Lösung der KdV-Gleichung

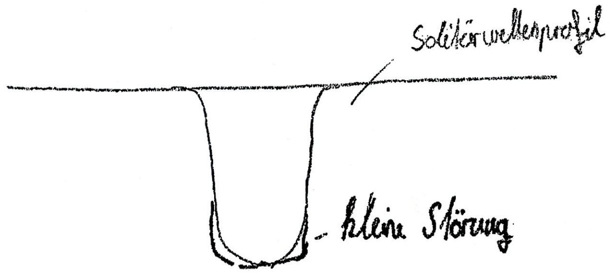


(4.) allgemeines Anfangsprofil u_0 mit $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)(1+|x|)\,dx < \infty$

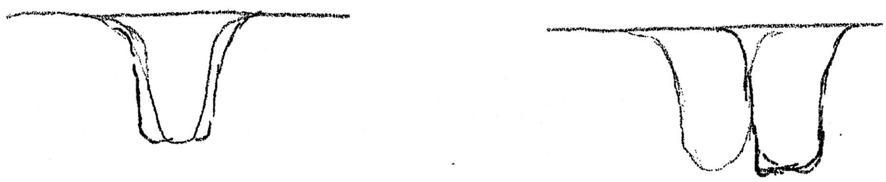
Dann hat $\partial_x^2 \varphi + u_0 \varphi = \lambda \varphi$ endl. viele diskrete EW. Jeder diskrete EW entspricht einem Soliton und die Lösung der KdV-Gl. evolviert folgendermaßen



Zur Stabilität von Solitärwellen bei der KdV-Gl.



Stabilität ist nicht unbedingt zu erwarten.



Aber es liegt nahe, dass folgender Stabilitätsbegriff erfüllt sein könnte.

Def.:
Eine Solitärwelle u^* heißt orbital stabil in H^1, falls gilt
$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \|u(0)-u^*\|_{H^1} < \delta \Rightarrow \forall t>0\ \inf_{s\in\mathbb{R}} \|u(\cdot,t)-u^*(\cdot+s)\|_{H^1} < \varepsilon$

Vorliegen der orbitalen Stabilität wurde 1968 von Benjamin gezeigt.

Bem.:
Die Linearisierung um die Solitärwelle hat nur rein imaginäre EW., d.h. es liegt lineare Stabilität vor, von der aber nicht auf nichtlineare Stab. geschlossen werden kann.

Zur Beweisstrategie von Benjamin:

- $M(u) = H(u) + cE(u) = \int \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + u^3 + \frac{c}{2}u^2\,dx$ ist Erhaltungsgröße, also $\frac{d}{dt}M(u(t)) = 0$ und die Solitärwellenlsg. u_c mit $u_c(x,t) = -2c\,\mathrm{sech}^2(\sqrt{c}\,(x-4t))$ ist stationärer Punkt von M, denn es gilt:

$$M(u_c+\varepsilon v) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(u_c'+\varepsilon v')^2 + (u_c+\varepsilon v)^3 + \frac{c}{2}(u_c+\varepsilon v)^2\,dx =$$

$$\ominus\; M(u_c) + \varepsilon \int (-u_c'' + 3u_c^2 + cu_c) v \, dx + \varepsilon^2 \int \tfrac{1}{2}(v')^2 + 3u_c v^2 + \tfrac{c}{2} v^2 dx \qquad (*)$$

$$+ \varepsilon^3 \int v^3 \, dx$$

$$=: M(u_c) + \partial_u M(u_c)[\varepsilon v] + \partial_u^2 M(u_c)[\varepsilon v, \varepsilon v] + \partial_u^3 M(u_c)[\varepsilon v, \varepsilon v, \varepsilon v]$$

$\partial_u M(u_c)$ heißt erste Variation von M.

In $(*)$ kann u_c als Fkt. von x aufgefasst werden, also

$$u_c(x) = -2 \cdot c \cdot \operatorname{sech}^2(\sqrt{c}\, x),$$

da M translationsinvariant ist, also

$$M(u(\cdot)) = M(u(\cdot + x_0)).$$

Da $u_c(x)$ die gewl. Dgl.

$$v'' - cv - 3v^2 = 0$$

erfüllt, folgt

$$\partial_u M(u_c) = 0 \; .$$

Leider ist $M(u)$ kein quadratisches Funktional. Schränke daher das Funktional auf die Menge aller Funktionen $u \in H^1$ mit

$$E(u) = E_c = E(u_c)$$

ein. Dann kann gezeigt werden, dass u_c ein Minimum von M in dieser Menge ist und außerdem gilt

$$\exists_{c_1, c_2 > 0} : 0 \leq c_1 \, d_\tau(u, u_c)^2 \leq M(u) - M(u_c) \leq c_2 \, \|u - u_c\|_{H^1} \quad (\mathrm{I})$$ (Interpolationsungleichung)

für $\|u - u_c\|_{H^1}$ hinreichend klein, wobei

$$d_\tau(u, v) = \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \| u(\cdot + x_0) - v(\cdot) \|_{H^1} .$$ ~ Interpolation modulo Translation

Dies folgt daher, weil auf dieser Menge die 2. Variation

$$\partial_u^2 M(u_c)[v, v] = \int \tfrac{1}{2} v'^2 + 3u_c v^2 + \tfrac{c}{2} v^2 \, dx$$

positiv definit ist.

Dies und (I) liefert die orbitale Stabilität von Lösungen mit Anfangswerten u_0 mit $E(u_0) = E_c$.

Sei nun u_0 so beschaffen, dass

$$|E(u_0) - E_c| < \delta$$

Wdh.

Wegen

$$E(u_c) = 8c^{3/2}/3 \quad \text{f.a. } c>0,$$

dann existiert ein c^*, mit $|c-c^*| \leq C\delta$ und $E(u_0) = E_{c^*}$.

Daher folgt mit Hilfe der obigen Argumentation:

$$\inf_{x_0\in\mathbb{R}} \|u(\cdot,t) - u_c(\cdot+x_0,t)\|_{H^1} \leq \inf_{x_0\in\mathbb{R}} \|u(\cdot,t) - u_{c^*}(\cdot+x_0,t)\|_{H^1}$$
$$+ \inf_{x_0\in\mathbb{R}} \|u_{c^*}(\cdot+x_0,t) - u_c(\cdot+x_0,t)\|_{H^1}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

für hinreichend kleine δ. — obige Arg. von $E(u_0)=E(u_{c^*})$ — explizite Kenntnis von u_c, u_{c^*}

<u>Bem.:</u>

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u + 6u\,\partial_x u$$
$$\partial_t u_{n+1} = -\partial_x^3 u_{n+1} + 6u_n\,\partial_x u_{n+1} \quad (n\to\infty)$$
$$\partial_t u_\varepsilon = -\varepsilon\,\partial_x^4 u_\varepsilon + 6u_\varepsilon\,\partial_x u_\varepsilon \quad (\text{Glättung}) \; (\varepsilon\to 0)$$

$\rightsquigarrow$ Existenz und Regularitätstheorie in H^m, $m\geq 1$.

Mit komplizierteren dispersiven Abschätzungen (Strichartz-Abschätzungen; [Bourgain, Tao]) bekommt man Existenz und Regularität in H^s mit $s<1$ (sogar für kleine negative Werte von s, d.h. $-s \ll 1$). (low regularity theorem $\rightsquigarrow$ Physik Anwendung: Gibbs-Maße).