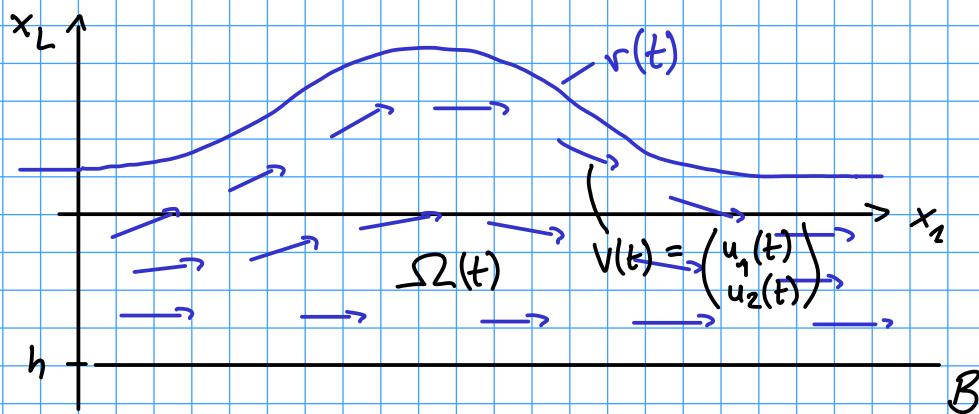


# 5. Die Wasserwellengleichungen



Das 2-dimensionale Wasserwellenmodell:

Betrachtet wird ein unendlich langer Kanal der Tiefe  $h$ . Wir betrachten den Fall einer endlich konstanten Tiefe. Durch Reskalieren können wir oBdA  $h=1$  annehmen. Das Gebiet  $\Omega(t) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}, -1 < x_2 < \eta(x_1, t)\}$

ist mit einer inkompressiblen, nicht viskosen Flüssigkeit gefüllt, auf die die Schwerkraft wirkt. Die Dichte der Flüssigkeit sei homogen, oBdA  $\equiv 1$ . Die freie Oberfläche  $\Gamma(t) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = \eta(x_1, t)\}$  ist eine Jordan-Kurve, welche in  $x_2$ -Richtung beschränkt ist und den Boden  $B = \{(x_1, -1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$  nicht schneidet.

Zur Formulierung der Bewegungsgleichungen für die Flüssigkeit werden verschiedene Koordinatensysteme verwendet:

1.) Formulierung in Eulerkoordinaten (ortsfest).

Die Bewegungsgleichungen für das Geschwindigkeitsfeld  $V$  sind dann:

$$\begin{cases} \partial_t V + (V \cdot \nabla) V = -\nabla p + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & (1) \\ \nabla \cdot V = 0 & (2) \end{cases}$$

auf  $\Omega(t)$ . Das sind die inkompressiblen Eulergleichungen. Hierbei ist  $p$  der Druck und  $-\nabla p$  eine Zwangskraft, welche die Inkompressibilität erhält. Das System sei so reskaliert, dass die Gravitationskonstante  $g=1$  sei.

Randbedingungen:

1.) Oberflächenteilchen bleiben Oberflächenteilchen, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ ist tangential zu } (t, \Gamma(t))^T. \quad (3)$$

2.) Undurchlässiger Boden, d.h.

$$V \cdot \vec{n} \Big|_{x_2=-1} = -u_2 = 0. \quad (4)$$

3.) Randbedingungen für den Druck

a.) ohne Oberflächenspannung

$$p = \text{const.} = \underset{\text{obdA}}{0} \quad \text{auf } \Gamma(t)$$

b.) mit Oberflächenspannung

$$p = -b\mathcal{K} \quad \text{auf } \Gamma(t)$$

$\mathcal{K}$  = Krümmung von  $\Gamma(t)$

$b$  = Bondzahl (proportional zur Stärke der Oberflächenspannung)

(5)

Mögliche Zusatzannahme:

$$\text{rot } V(t=0) = 0$$

Dann gilt im  $\mathbb{R}^2$ :  $\forall t > 0$ :  $\text{rot } V(t) = 0$ .

$$\lceil \text{Sei } \omega = \text{rot } V.$$

$$\stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \partial_t \omega = -V \cdot \nabla \omega$$

$$\lfloor \Rightarrow [\omega = 0 \Rightarrow \partial_t \omega = 0] \rfloor$$

In diesem Fall kann man die Dynamik von (1)-(5) eindeutig mit Hilfe von zwei Gleichungen auf  $\Gamma$  beschreiben. Denn es gilt:

$$\text{rot } V = 0 \Rightarrow \exists \text{ Potential } \phi \text{ von } V = \nabla \phi.$$

$$\text{div } V = 0 \Rightarrow \Delta \phi = \text{div } \nabla \phi = \text{div } V = 0.$$

$\Rightarrow \exists \mathcal{K} = \mathcal{K}(\eta) : \partial_{x_2} \phi|_{\Gamma} = \mathcal{K}(\eta) \partial_{x_1} \phi|_{\Gamma}$ , d.h.  $u_2|_{\Gamma}$  ist eindeutig durch  $u_1|_{\Gamma}$  bestimmt.

Es genügt daher, Evolutionsgleichungen für  $\eta$  mit  $\Gamma(t) = (x_1, \eta(x_1, t))$  und  $u_1|_{\Gamma}$  zu betrachten.  $V$  in  $\Omega(t)$  bekommt man dann mit Hilfe von  $\nabla\phi$ , nachdem man  $\Delta\phi = 0$  auf  $\Omega(t)$  mit den Randbedingungen auf  $\Gamma$  und auf dem Boden gelöst hat.

Herleitung dieser beiden Gleichungen:

Im Falle ohne Oberflächenspannung, d.h.  $b=0$ , folgt aus (1):

$$\partial_t \nabla \phi + \frac{1}{2} \nabla |\nabla \phi|^2 = -\nabla p - \nabla x_2$$

$$\stackrel{\text{Integr.}}{\Rightarrow} \partial_t \phi = -\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - p - x_2 = c(t) \stackrel{\text{oBdA}}{:=} 0$$

$$\Rightarrow \partial_t \phi = -\frac{1}{2} \left( (\partial_{x_1} \phi)^2 + (\mathcal{K}(\eta) \partial_{x_1} \phi)^2 \right) - \eta \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Gamma(t)$$

$$\Rightarrow \partial_t \phi = -\frac{1}{2} (u_1^2 + (\mathcal{K}(\eta) u_1)^2) - \eta \quad \text{auf } \Gamma(t)$$

$$\Rightarrow \partial_t u_1 = -\frac{1}{2} \partial_{x_1} (u_1^2 + (\mathcal{K}(\eta) u_1)^2) - \partial_{x_1} \eta \quad \text{auf } \Gamma(t). \quad (6)$$

Umformung der Randbedingung (3):

Differenziere  $x_2 = \eta(x_1, t)$  nach  $t$  und nutze

$$(1, \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) = (1, u_1(t), u_2(t)) = (1, (\nabla \phi)^T).$$

$$\Rightarrow \partial_t \eta = V \cdot \begin{pmatrix} -\partial_{x_1} \eta \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{K}(\eta) u_1 - u_1 \partial_{x_1} \eta \quad \text{auf } \Gamma(t). \quad (7)$$

Mit

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{in } \Omega(t) \quad (8)$$

$$u_2 \Big|_{x_2=-1} = \partial_{x_2} \phi \Big|_{x_2=-1} = 0 \quad (9)$$

erhalten wir durch (6)-(9) ein geschlossenes System, welches im Falle ohne Oberflächenspannung zu (1)-(5) äquivalent ist.

Im Falle von Oberflächenspannung muss man (6) durch

$$\partial_t u_1 = -\partial_{x_1} \eta - \frac{1}{2} \partial_{x_1} ((u_1)^2 + (\mathcal{K}(\eta) u_1)^2) + b \partial_{x_1}^2 \left( \frac{\partial_{x_1} \eta}{\sqrt{1 + (\partial_{x_1} \eta)^2}} \right) \quad (6^*)$$

ersetzen. Dann ist (6\*)-(9) äquivalent zu (1)-(5).

2.) Formulierung in Lagrange-Koordinaten (partikelfest):

Es sei

$$\Gamma(t) := \left\{ \tilde{X}(\alpha, t) = (\tilde{X}_1(\alpha, t), \tilde{X}_2(\alpha, t)) = (\alpha + X_1(\alpha, t), X_2(\alpha, t)) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dann gilt

$$\partial_t \tilde{X} = \partial_t X = V, \quad X = (X_1, X_2).$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \partial_t^2 \tilde{X} = \partial_t V + (V \cdot \nabla) V = -\nabla p - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

wobei

$$V = V(\tilde{X}(\alpha, t), t),$$

$$p = p(\tilde{X}(\alpha, t), t).$$

Wir haben im Fall ohne Oberflächenspannung:

$$p(\tilde{X}(\alpha, t), t) = 0 \quad \text{auf } \Gamma(t)$$

$$\Rightarrow \langle \nabla p(\tilde{X}(\alpha, t), t), \partial_\alpha \tilde{X}(\alpha, t) \rangle = 0. \quad (11)$$

Multiplikation von (10) mit  $\partial_\alpha \tilde{X}$  liefert unter Berücksichtigung von (11):

$$\langle \partial_t^2 \tilde{X}, \partial_\alpha \tilde{X} \rangle + \partial_\alpha \tilde{X}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_t^2 X_1 (1 + \partial_\alpha X_1) + \partial_\alpha X_2 (1 + \partial_t^2 X_2) = 0. \quad (12)$$

Außerdem haben wir bei rotationsfreien Strömungen:

$$\partial_t X_2 = \mathcal{K}(X) \partial_t X_1. \quad (13)$$

(12) und (13) zusammen liefern:

$$\partial_t^2 X_1 (1 + \partial_\alpha X_1) + \partial_\alpha X_2 (1 + \partial_t (\mathcal{K}(X) \partial_t X_1)) = 0.$$

(12), (13) beschreiben eindeutig die Evolution von  $\Gamma$ . Mit (8), (9) erhält man dann die Informationen auf  $\Omega(t)$ .

Durch Einführung von  $U_1 = \partial_t X_1$  erhält man das System:

$$\partial_t X_1 = U_1$$

$$\partial_t X_2 = \mathcal{K}(X) U_1$$

$$\partial_t U_1 = -\left(1 + \partial_\alpha X_1 + (\partial_\alpha X_2) \mathcal{K}(X)\right)^{-1} \left( (\partial_\alpha X_2) (1 + [\partial_t, \mathcal{K}(X)] U_1) \right)$$

wobei  $[M, N] = MN - NM$  ist.

Bem.: Man kann oBdA  $X_1|_{t=0} = 0$  wählen.

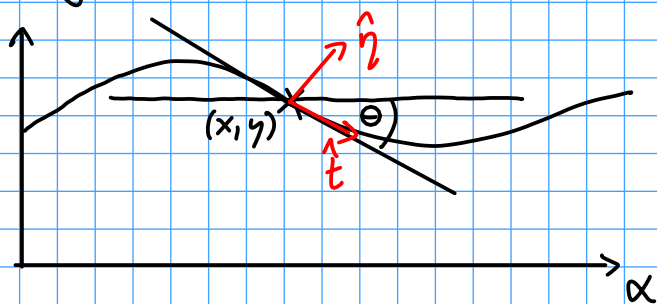
3.) Die Wasserwellengleichungen in der Bogenlängenformulierung:

Sei  $P(t): \mathbb{R} \rightarrow \Gamma(t)$ ,  $\alpha \mapsto P(\alpha, t) = (x(\alpha, t), y(\alpha, t))$  eine Parametrisierung der Oberflächenkurve nach der Bogenlänge, d.h.  $\partial_\alpha s := \sqrt{(\partial_\alpha x)^2 + (\partial_\alpha y)^2} \equiv 1$ .

Es gilt:

$$\partial_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \hat{\eta} + T \hat{t}, \quad (14)$$

wobei  $\hat{t} = (\cos \theta, \sin \theta)$  ein Tangenteneinheitsvektor,  $\hat{\eta} = (-\sin \theta, \cos \theta)$  ein Normaleneinheitsvektor,  $\theta = \arctan \frac{\partial_\alpha y}{\partial_\alpha x}$  der Tangentenwinkel,  $U$  die Normalgeschwindigkeit und  $T$  die Tangentialgeschw. (bzgl. d. Bogenlängenparametrisierung auf  $\Gamma(t)$ ) ist.



Sind  $\theta$  und  $\partial_\alpha s$  (hier  $\equiv 1$ ) bekannt, dann können  $x$  und  $y$  durch

Integration von  $\begin{pmatrix} \partial_\alpha x \\ \partial_\alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\alpha s \cos \theta \\ \partial_\alpha s \sin \theta \end{pmatrix}$  rekonstruiert werden. Aus (14) folgt:

$$\partial_t \theta = \frac{1}{\partial_\alpha s} \partial_\alpha U + \frac{T}{\partial_\alpha s} \partial_\alpha \theta, \quad (15)$$

$$\partial_t \partial_\alpha s = \partial_\alpha T - \partial_\alpha \theta U. \quad (16)$$

Aus der Forderung  $\partial_\alpha s \equiv 1$  folgt dann

$$\partial_\alpha T = \partial_\alpha \Theta U$$

$$\Rightarrow T(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \partial_\alpha \Theta(\beta) U(\beta) d\beta + \underbrace{C}_{=0 \text{ oBdA}}. \quad (17)$$

Die Normalengeschwindigkeit  $U(t)$  kann aufgrund der Rotationsfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes  $V$  unter Ausnutzung der Neumannrandbedingung (9) bei bekanntem  $\Gamma(t)$  eindeutig aus der physikalischen Tangentialgeschw.  $v(t)$  auf  $\Gamma(t)$  bestimmt werden, wobei die Evolution von  $v$  durch die inkompressible Euler-Gleichung (1) bestimmt ist. Die Bestimmung von  $U(t)$  aus  $v(t)$  geschieht über das sogenannte Birkhoff-Rott Integral  $W$ .

Stelle dann das Geschwindigkeitspotential  $\phi$ , welches bekanntlich  $\Delta\phi = 0$  auf  $\Omega(t)$  löst, dar durch

$$\phi(x_0, y_0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\alpha) \langle \nabla G(x_0, y_0, x(\alpha), y(\alpha), \hat{\eta}(\alpha)) \rangle d\alpha - \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v}(\alpha) G(x_0, y_0, x_B(\alpha), y_B(\alpha)) d\alpha$$

für alle  $(x_0, y_0) \in \Omega(t)$ . Hierbei ist

$$G(x_0, y_0, x, y) = -\frac{1}{4\pi} \ln((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2)$$

die Grundlösung der Laplace-Gleichung im  $\mathbb{R}^2$ , d.h.

$$\Delta G(x_0, y_0, x, y) = \delta_{(x_0, y_0)} \quad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

$\vec{v}$  ist die sog. Ladungsstärke, welche auf dem Boden  $B$  definiert ist,  $(x(\alpha), y(\alpha))$ ,  $(x_B(\alpha), y_B(\alpha))$  sind Bogenlängenparametrisierungen von  $\Gamma(t)$  bzw.  $B$  und  $\mu$  ist die sog. Dipolstärke. Außerdem gilt für  $V(\alpha) := V(x(\alpha), y(\alpha)) = \nabla\phi(x(\alpha), y(\alpha))$ :

$$V(\alpha) = \lim_{(x_0, y_0) \rightarrow (x(\alpha), y(\alpha))} \nabla\phi(x_0, y_0) = \omega(\alpha) + \frac{1}{2} \gamma(\alpha) \hat{t}(\alpha),$$

wobei  $\gamma = \partial_\alpha \mu$  die sogenannte Vortex-sheet-Stärke ist und

$$\omega(\alpha) = \omega_1(\gamma(x(\alpha), y(\alpha))) + \omega_2(\vec{v}(x_B(\alpha), y_B(\alpha)))$$



mit

Cauchy'scher Hauptwert

$$(\operatorname{Re} W_1(\gamma) - i \operatorname{Im} W_1(\gamma))(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(\alpha', t)}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} d\alpha',$$

$$(\operatorname{Re} W_2(\vartheta) - i \operatorname{Im} W_2(\vartheta))(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vartheta(\alpha', t)}{z(\alpha, t) - z_B(\alpha')} d\alpha',$$

wobei  $z(\alpha, t) = x(\alpha, t) + iy(\alpha, t)$ ,  $z_B(\alpha) = x_B(\alpha) + iy_B(\alpha)$ . Ist also  $v(t)$  vorgegeben, dann bestimme  $\gamma(t)$  über

$$\frac{1}{2} \gamma(t) + W(\gamma(t)) \cdot \hat{t} = v(t),$$

wobei aufgrund der Neumannrandbedingungen (9)  $\vartheta(t)$  durch  $\gamma(t)$  ausgedrückt werden kann vermöge

$$\vartheta(\alpha', t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(\alpha'')}{z(\alpha'', t) - z_B(\alpha')} d\alpha''.$$

Für das so bestimmte  $\gamma$  berechne dann

$$W(\gamma(t)) = W_1(\gamma(t)) + W_2(\vartheta(\gamma(t))).$$

Dann ist  $U(t) = W(\gamma(t)) \cdot \hat{\eta}(t)$ .

Für  $v$  erhalten wir aus den Euler-Gleichungen und den Randbedingungen (3), (5):

$$\partial_t v = -\partial_x \gamma + b \partial_x^2 \theta - \frac{1}{2} \partial_x \left( (v-T)^2 \right) + (W \cdot \hat{\eta}) \partial_t \theta.$$

$\uparrow$  Fkt. von  $\theta, v$        $\uparrow$  betr. W als Fkt. von  $v$

Berücksichtigt man nur noch, dass die Evolution von  $x$  auf der Forderung  $\partial_x s \equiv 1$  durch die Evolution von  $y$  bestimmt wird, erhält man schließlich das folgende geschlossene Differentialgleichungssystem:

$$\partial_t \gamma = (W \hat{\eta}) \cos \theta + T \partial_x \gamma, \quad (18)$$

$$\partial_t v = -\partial_x \gamma + b \partial_x^2 \theta - \delta \partial_x^2 \delta + (W \cdot \hat{\eta}) \partial_t \theta, \quad (19)$$

$$\partial_t \Theta = (\partial_x \omega) \cdot \hat{\eta} + \frac{1}{2} \gamma(v) \partial_x \Theta - \delta \partial_x \Theta, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_x \delta = & -(1+c) \partial_x \Theta + 6 \partial_x^3 \Theta - \partial_x (\delta \partial_x \delta) \\ & + \left( (\partial_x \omega) \cdot \hat{\eta} + \frac{\gamma}{2} \partial_x \Theta \right)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$[\text{mit}] \quad \delta = v - T, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} c = & (\partial_t \omega) \cdot \hat{\eta} + \delta (\partial_x \omega) \cdot \hat{\eta} + \frac{\gamma}{2} \partial_t \Theta \\ & + \frac{\gamma}{2} \delta \partial_x \Theta + (\cos \Theta - 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Bem.: Im Fall unendlicher Wassertiefe besteht  $\omega$  nur aus  $\omega_1$ .

Weitere Formulierungen der Wasserwellengleichungen:

4.) Konforme Parametrisierung von  $\overline{\Omega}(t)$ .

5.) Koordinateninvariante bzw. koordinatenfreie Formulierung unter Verwendung abstrakter differentialgeometrischer Größen (z.B. Laplace-Beltrami-Operator, Ricci-Krümmung).

Es gibt Beweise der lokalen Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen der Wasserwellengleichungen:

- in Lagrangekoordinaten (z.B. Yosihara, Craig, Wu, Schneider-Wayne)
- in Eulerkoordinaten (z.B. Iguchi, Lannes)
- in der Bogenlängenformulierung (Ambrose-Masmoudi)
- in konformer Parametrisierung (Hunter-Ifrim-Tartaru)
- in der koordinateninvarianten Formulierung (Shatah-Zeng)

Globale oder fast globale Existenzresultate für hinreichend kleine Anfangsdaten sind bislang nur für den Fall von unendlicher Wassertiefe bekannt:

- für die 2-dimensionalen Wasserwellengleichungen (Wu, Alazard-Delort, Ionescu-Pusateri, Hunter-Ifrim-Tartaru)
- für die 3-dim. Wvgl. (Germain-Masmoudi-Shatah, Wu)

Zur mathematischen Erklärung des Auftretens typischer Wasserwellenprofile:  
Sei  $b=0$ . Setzt man den Ansatz

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u_x \end{pmatrix}(x, t) = \varepsilon^\alpha A(\varepsilon x, \varepsilon t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha+1})$$

mit  $\varepsilon \ll 1$  und  $\alpha > 2$  in die Wasserwellengleichungen in Euler-Koordinaten (6) - (7) ein und setzt die Terme mit niedrigster  $\varepsilon$ -Potenz gleich, dann erhält man die Wellengleichung

$$\partial_\tau^2 A = \partial_\xi^2 A$$

mit  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\xi = \varepsilon x$ . Die Wellengleichung besitzt Lösungen der Form

$$A(\xi, \tau) = a \sin(k(\xi \pm \tau) + \xi_0)$$

mit  $a, \xi_0 \in \mathbb{R}$  und  $k \geq 0$ . Da dieser Ansatz zu führender Ordnung nur langwellige Wellen liefert, sieht man zu führender Ordnung keine Dispersion.

Zum Erkennen von Dispersionseffekten linearisieren wir die Wasserwellengleichung um die triviale Nulllösung. Die Linearisierung der Evolutionsgleichungen in Lagrangekoordinaten ist gegeben durch

$$\partial_t^2 X_1 + \partial_x X_2 = 0$$

$$\partial_t X_2 = \mathcal{K}_0 \partial_t X_1,$$

wobei der Operator  $\mathcal{K}_0$  definiert ist durch  $U_2|_{x_2=0} = \mathcal{K}_0 U_1|_{x_2=0}$ , wobei

$U_1, U_2$  Lösungen von

$$\partial_{x_2} U_1 + \partial_{x_2} U_2 = 0$$

$$\partial_{x_2} U_2 - \partial_{x_1} U_2 = 0$$

für  $(x_1, x_2) \in \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}, -h \leq x_2 \leq 0 \}$ , sowie  $U_2|_{x_1=-1} = 0$   
 $\uparrow$  (Wassertiefe o.B.d.A.  $\equiv 1$ )

und  $U_2|_{x_2=0} = C(x_1)$  (beliebig vorgegeben) ist.

Es gilt:  $\mathcal{K}_0$  ist ein Multiplikator. Im Fourierraum ist es eindeutig bestimmt durch

$$\widehat{\mathcal{K}_0 u}(k) = -i \tanh(k) \hat{u}(k).$$

(Allgemeines:  $\widehat{\mathcal{K}}_0 u(k) = -i \tanh(hk) \hat{u}(k)$ .)

Sei  $\nabla \phi = U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ , dann liefert die Fouriertransformation von  $\Delta \phi(x_1, x_2) = 0$  bzgl.  $x_1$ :

$$-k^2 \hat{\phi}(k, x_2) + \partial_{x_2}^2 \hat{\phi}(k, x_2) = 0.$$

Hinzu kommen die Randbedingungen

$$\partial_{x_2} \hat{\phi} \Big|_{x_2=1} = 0,$$

$$\partial_{x_2} \hat{\phi} \Big|_{x_2=0} = \hat{C}(k).$$

Wir erhalten als Lösungen:

$$\hat{\phi}(k, x_2) = \hat{C}(k) \cosh(k \cdot (1+x_2)).$$

Daher gilt:

$$\hat{u}_1 \Big|_{x_2=0}(k) = ik \hat{C}(k) \cosh(k(1+x_2)),$$

$$\hat{u}_2 \Big|_{x_2=0}(k) = k \hat{C}(k) \sinh(k(1+x_2))$$

$$\Rightarrow \hat{u}_2 \Big|_{x_2=0}(k) = -i \tanh(k) \hat{u}_1 \Big|_{x_2=0}(k).$$

(für allgemeines  $h$  durch Reskalieren:  $k \rightarrow hk$ )

Integration der zweiten Gleichung der Linearisierung nach  $t$  und Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$\partial_t^2 X_1 + \partial_x \mathcal{K}_0 X_1 = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 X_2 + \partial_x \mathcal{K}_0 X_2 = 0.$$

Diese Gleichung hat Lösungen der Form

$$X_2(\alpha) = e^{ik\alpha + iw(k)t}$$

mit  $\omega^2(k) = k \tanh(k)$ . Wir haben hier also Dispersion vorliegen, denn es gilt

$$\lim_{|k| \rightarrow 0} \left| \frac{\omega(k)}{k} \right| = 1, \quad \lim_{|k| \rightarrow \infty} \left| \frac{\omega(k)}{k} \right| = 0.$$

Das heißt, hier breiten sich Wellen mit kleinerem  $k$  [und damit größerer Wellenlänge] schneller aus als Wellen mit größerem  $k$ . [genau anders herum wie bei der NLS-Gleichung] Für  $|k| \rightarrow 0$  stimmt die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit der der Lösungen der Wellengleichung überein.

Bem. 1:

Im Falle von Oberflächenspannung (also  $b \neq 0$ ) kann man die oben diskutierten Rechnungen analog durchführen (mit einem zusätzlichen, von  $b$  abhängigen Term) und erhält

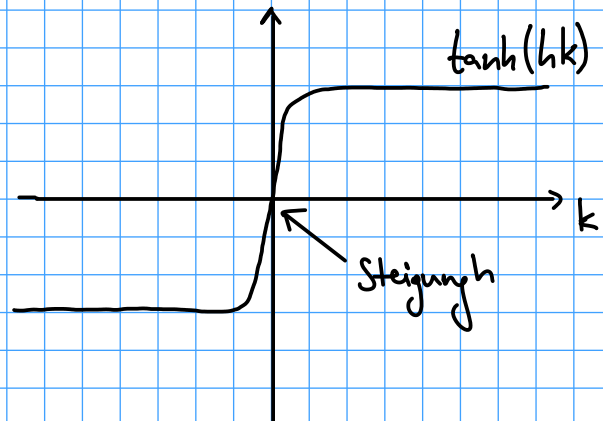
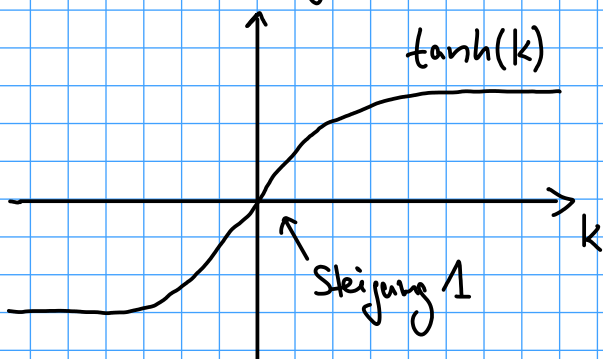
$$\omega^2(k) = (k + bk^3) \tanh(k).$$

In diesem Fall liegt ein anderes Dispersionsverhalten vor:

$$\lim_{|k| \rightarrow 0} \left| \frac{\omega(k)}{k} \right| = 1, \quad \frac{\omega(k)}{k} \stackrel{k \gg 1}{\approx} \sqrt{b} |k|.$$

Bem. 2:

Für allgemeines  $h$  geht  $\tanh(k)$  in den Dispersionsrelationen über in  $\tanh(hk)$ .



Im Limes  $h \rightarrow \infty$  (unendliche Wassertiefe) geht der  $\tanh$  über in

$$\text{sign}(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ -1, & k < 0 \end{cases}$$

und somit geht auch  $\hat{\mathcal{K}}_0$  über in

$$\hat{H} \text{ mit } \hat{H}(k) = -i \operatorname{sgn}(k).$$

Dies ist die Hilberttransformation. [ $\hat{\mathcal{K}}_0$  ist Regularisierung von  $\hat{H}$  für kleine  $k$ .]

Führt man die obige Linearisierung in Euler-Koordinaten durch, dann ergibt sich

$$\partial_t \eta = \mathcal{K}_0 u_1$$

$$\partial_t u_1 = -\partial_x \eta$$

mit den Lösungen

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \end{pmatrix}(x, t) = A(x, t) \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix},$$

$$A(x, t) = a \sin(k(x - c(k)t) + x_0),$$

$$a, x_0 \in \mathbb{R}, \quad c(k) = \frac{\pm \sqrt{\omega^2(k)}}{k}.$$

Auch in der Bogenlängenformulierung erhält man dieselbe Linearisierung.

Lösungen der Wasserwellengleichungen, die (zu führender Ordnung) ein sinusförmiges Profil haben (mit oder ohne Dispersion) heißen Airy-Wellen.

Zur Beobachtung nichtlinearer Welleneffekte wählen wir andere Skalierungen. Setzt man den Langwellenansatz der Form

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \end{pmatrix}(x,t) = \varepsilon^2 A(\varepsilon(x \pm t), \varepsilon^3 t) \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

$\varepsilon \ll 1$ , in (6\*)-(7) ein, dann erhält man zu führender Ordnung  $\varepsilon$  die KdV-Gleichung

$$\partial_\tau A = \pm \left( \frac{1}{6} - \frac{b}{2} \right) \partial_\xi^2 A \pm \frac{3}{2} A \partial_\xi A$$

mit  $\tau = \varepsilon^3 t$ ,  $\xi = \varepsilon(x \pm t)$ . Für  $b = \frac{1}{3} + 2v\varepsilon^2$  erhält man mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \end{pmatrix}(x,t) = \varepsilon^4 A(\varepsilon(x \pm t), \varepsilon^5 t) \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^5)$$

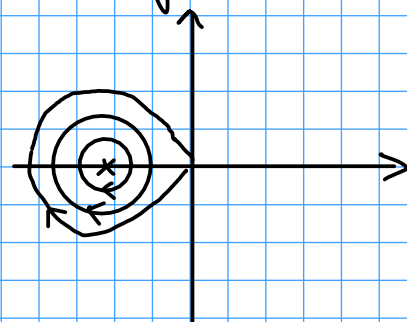
die Kawahara-Gleichung

$$\partial_\tau A = \mp v \partial_\xi^3 A \pm \frac{1}{g_0} \partial_\xi^5 A \pm \frac{3}{2} A \partial_\xi A$$

mit  $\tau = \varepsilon^5 t$ ,  $\xi = \varepsilon(x \pm t)$ . Die KdV-Gleichung besitzt bekanntlich periodische Lösungen, Solitärwellenlösungen und N-Soliton-Lösungen. Folglich ist zu erwarten, dass bei den Wasserwellengleichungen (zu führender Ordnung) ebenfalls solche Wellenprofile zu beobachten sind. Lösungen der Wasserwellengleichungen, die zu führender Ordnung wie die periodischen Lösungen der KdV-Gleichung aussehen, heißen auch knoidale Wellen.

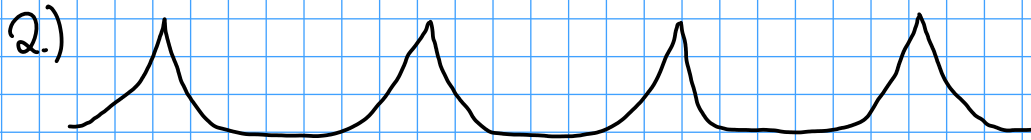
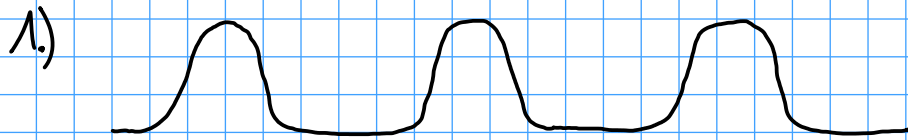
Es gibt aber auch sowohl exakte periodische Wellenlösungen (man nennt sie auch Stokes-Wellen) als auch exakte Solitärwellenlösungen der Wasserwellengleichungen. Deren Existenz

kann mit nicht-trivialen Methoden aus der Theorie dynamischer Systeme gezeigt werden.





Es gibt zwei Typen von Stokeswellen:



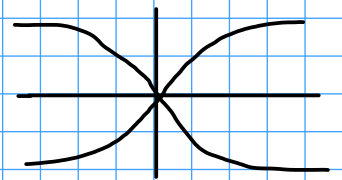
Setzt man den Ansatz

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \end{pmatrix}(x,t) = \varepsilon A(\varepsilon(x-ct), \varepsilon^2 t) e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \varphi(k_0) + \text{c.c.} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

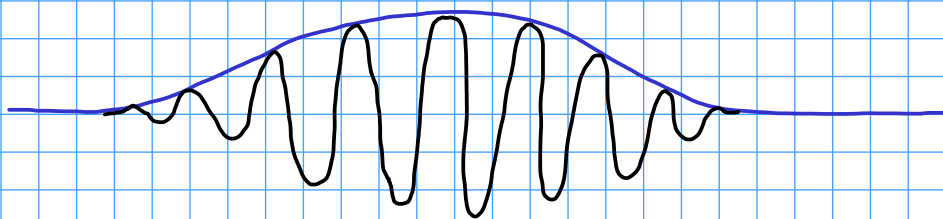
$\varepsilon \ll 1$ ,  $\omega(k) = \text{sign}(k) \sqrt{k + bk^3 \tanh(k)}$ ,  $c = \partial_k \omega(k_0)$ ,  $\varphi(k_0) \in \mathbb{C}^2$  in (6\*)-(7) ein, dann erhält man zu führender Ordnung in  $\varepsilon$  die

NLS-Gleichung

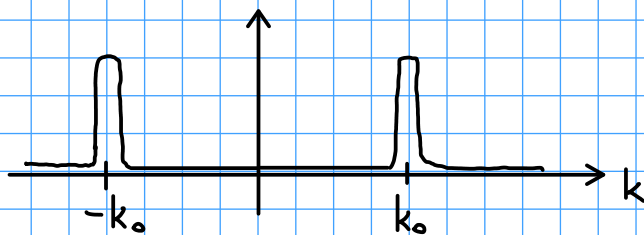
$$\partial_\tau A = i\nu_1 \partial_\xi^2 A + i\nu_2 A |A|^2 \quad (24)$$



mit  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $\xi = \varepsilon(x-ct)$  und  $\nu_j = \nu_j(k_0) \in \mathbb{R}$ . Die NLS-Gleichung beschreibt dann zu führender Ordnung die Dynamik der Einhüllenden eines modulierten oszillierenden Wellenpaketes mit Grundwellenzahl  $k_0$ .



Die Fouriertransformierte eines solchen Wellenpaketes sieht folgendermaßen aus:



Man kann auch periodische Wellenlösungen der Wasserwellengleichungen modulieren. Die Dynamik von modulierten periodischen Wellenzügen kann man dann zu führender Ordnung durch die sogenannten Whitham-Gleichungen (ein System

nichtlinearer hyperbolischer Erhaltungsgleichungen) beschreiben. Die mathematisch rigorose Rechtfertigung, dass die Dynamik von Lösungen der Näherungsgleichungen auch bei Lösungen der Originalgleichungen zu beobachten ist, erfolgt häufig durch den Beweis, dass der relative Fehler der Approximation auf den charakteristischen Längen- und Zeitskalen der Approximationsgleichungen klein ist.

Für die KdV-, die Kawahara- und die NLS-Approximationen der 2-dimensionalen Wasserwellengleichungen mit endlicher Wassertiefe sind folgende Approximationstheoreme bekannt:

### Theorem 5.1:

Für alle  $b_0, C_0, \tau_0 > 0$  existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so dass für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und alle  $b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$  mit  $0 \leq b \leq b_0$  das Folgende gilt. Sei

$$\eta|_{t=0}(x) = \varepsilon^2 \Phi_1(\varepsilon x),$$

$$u_1|_{t=0}(x) = \varepsilon^2 \Phi_2(\varepsilon x)$$

$$\text{mit } \max \left\{ \left\| (\Phi_1(\cdot), \Phi_2(\cdot)) \right\|_{H_{\xi}^{s+8}}, \left\| (g^k \Phi_1(\cdot), g^k \Phi_2(\cdot)) \right\|_{H_{\xi}^{s+3}} \right\} \leq C_0 \varepsilon^{\ell},$$

wobei  $\xi = \varepsilon x$ ,  $s \geq 7$ ,  $k > 1$ ,  $\ell \geq 0$  und  $g(k) = (1 + \xi^2)^{1/2}$ . Sei

$$\partial_{\tau} A_1 = \left( \frac{b}{2} - \frac{1}{6} \right) \partial_{\xi}^3 A_1 - \frac{3}{2} A_2 \partial_{\xi} A_1,$$

$$\partial_{\tau} A_2 = \left( \frac{1}{6} - \frac{b}{2} \right) \partial_{\xi}^3 A_2 + \frac{3}{2} A_2 \partial_{\xi} A_2,$$

$$A_1|_{\tau=0} = \frac{1}{2} (\Phi_1 + \Phi_2), \quad A_2|_{\tau=0} = \frac{1}{2} (\Phi_1 - \Phi_2).$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung von (6\*)-(7) mit den obigen Anfangsbedingungen, für die gilt:

$$\sup_{t \in [0, \tau_0 \varepsilon^{-3}]} \left\| \begin{pmatrix} \eta \\ u_1 \end{pmatrix}(\cdot, t) - \psi(\cdot, t) \right\|_{H_{\xi}^s \times H_{\xi}^{s-\frac{1}{2}}} \leq C_1 \varepsilon^{4+\ell},$$

Wobei

$$\psi(x,t) = \varepsilon^2 A_1(\varepsilon(x-t), \varepsilon^3 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 A_2(\varepsilon(x+t), \varepsilon^3 t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$C_2 > 0$  ist.

Theorem 5.2:

Sei  $b = \frac{1}{3} + 2\nu\varepsilon^2$ . Für alle  $C_0, \tau_0 > 0$  ex. ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so dass für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  Folgendes gilt. Sei

$$\eta|_{t=0}(x) = \varepsilon^4 \Phi_1(\varepsilon x), \quad u_n|_{t=0}(x) = \varepsilon^4 \bar{\Phi}_2(\varepsilon x)$$

mit  $\max \left\{ \|\Phi_1(\cdot), \bar{\Phi}_2(\cdot)\|_{H_{\xi}^{s+10}}, \left\| \left( \rho^k \Phi_1(\cdot), \rho^k \bar{\Phi}_2(\cdot) \right) \right\|_{H_{\xi}^{s+3}} \right\} \leq C_0 \varepsilon^l$ ,

$\xi = \varepsilon x$ ,  $s \geq 7$ ,  $k > 1$  und  $l \geq 0$ . Sei

$$\partial_{\tau} A_1 = \nu \partial_{\xi}^3 A_1 - \frac{1}{g_0} \partial_{\xi}^5 A_1 - \frac{3}{2} A_1 \partial_{\xi} A_1, \quad \partial_{\tau} A_2 = -\nu \partial_{\xi}^3 A_2 + \frac{1}{g_0} \partial_{\xi}^5 A_2 + \frac{3}{2} A_2 \partial_{\xi} A_2,$$

$$A_1|_{\tau=0} = \frac{1}{2} (\Phi_1 + \bar{\Phi}_2), \quad A_2|_{\tau=0} = \frac{1}{2} (\Phi_1 - \bar{\Phi}_2),$$

und sei  $[0, \tau_2]$  das maximale Existenzintervall von  $A_1, A_2$  in  $H_{\xi}^{s+10} \cap H_{\xi}^{s+3}(k)$

und  $\tau_2 = \min \{ \tau_0, \tau_2 \}$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung von (6\*)-(7)

zu den obigen Anfangsbedingungen mit

$$\sup_{t \in [0, \tau_2 \varepsilon^{-5}]} \left\| \begin{pmatrix} \eta \\ u_n \end{pmatrix}(\cdot, t) - \psi(\cdot, t) \right\|_{H_{\xi}^s \times H_{\xi}^{s-\frac{1}{2}}} \leq C_1 \varepsilon^{6+l}$$

mit

$$C_1 > 0$$

und

$$\psi(x, t) = \varepsilon^4 A_1(\varepsilon(x-t), \varepsilon^5 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon^4 A_2(\varepsilon(x+t), \varepsilon^5 t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Theorem 5.3:

Sei  $b=0$  und  $s \geq 7$ . Für alle  $k_0, C_1, \tau_0 > 0$  existieren  $\tau_1, \varepsilon_0 > 0$ , so dass für alle Lösungen  $A \in C^0([0, \tau_0], H^s(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$  der NLS-Gleichung (24) mit

$$\sup_{\tau \in [0, \tau_0]} \|A(\cdot, \tau)\|_{H^s(\mathbb{R}, \mathbb{C})} \leq C_1$$

und alle  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  Folgendes gilt:

Es existiert eine Lösung von (6)-(7) mit

$$\sup_{t \in [0, T_2 \varepsilon^{-2}]} \left\| \begin{pmatrix} \eta \\ u_2 \end{pmatrix}(\cdot, t) - \psi(\cdot, t) \right\|_{(H^s(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2} \leq C_2 \varepsilon^{3/2}$$

mit  $C_2 > 0$  und  $\psi(x, t) = \varepsilon A(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t) e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \varphi(k_0) + \text{c.c.}$

Um die zentralen Ideen des (langen) Beweises von Thm. 5.1 zu verdeutlichen, zeigen wir im Folgenden die Gültigkeit der KdV-Approximation für die Boussinesq-Gleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - \partial_x^4 u + \partial_x^2 (u^2) \quad (25)$$

mit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und  $u(x, t) \in \mathbb{R}$ .

Bem.:

Setzt man den Ansatz

$$u_1(x, t) = \varepsilon^2 Z(\varepsilon x, \varepsilon t), \quad \eta(x, t) = \varepsilon^2 W(\varepsilon x, \varepsilon t)$$

in die 2-D Wasserwellengleichungen ohne Oberflächenspannung (6)-(7) ein, dann erhält man zu führender Ordnung in  $\varepsilon$ :

$$\partial_\tau^2 Z = \partial_\xi^2 Z - \varepsilon^2 \partial_\xi^4 Z + \varepsilon^2 \partial_\xi^2 (Z^2)$$

mit  $\tau = \varepsilon t$  und  $\xi = \varepsilon x$ . Wir zeigen nun:

Satz 5.4:

Sei  $A \in C^0([0, T_0], H^7)$  Lösung der KdV-Gleichung

$$\partial_\tau A = -\frac{1}{2} \partial_x^3 A - \frac{1}{2} \partial_x (A^2).$$

Dann existieren  $\varepsilon_0, C > 0$ , so dass für alle  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  gilt:

Es existiert eine Lösung  $u$  der Boussinesq-Gleichung (25) mit

$$\sup_{t \in [0, T_0 \varepsilon^{-3}]} \|u(\cdot, t) - \varepsilon^2 A(\varepsilon(\cdot - t), \varepsilon^3 t)\|_{H^1} \leq C \varepsilon^{7/2}.$$

Beweis:

1. Schritt: Einsetzen des Ansatzes

$$u(x,t) = \varepsilon^2 \Psi(x,t) := \varepsilon^2 A(\varepsilon(x-t), \varepsilon^3 t)$$

in (25) und formale Herleitung der KdV-Gleichung durch Gleichsetzen der Terme mit niedrigster  $\varepsilon$ -Potenz (geht analog zur Übungsaufgabe 25).

2. Schritt: Abschätzung des Residuums

$$\text{Res}_u(\varepsilon^2 \Psi) := -\partial_t^2(\varepsilon^2 \Psi) + \partial_x^2(\varepsilon^2 \Psi) - \partial_x^4(\varepsilon^2 \Psi) + \partial_x^2((\varepsilon^2 \Psi)^2).$$

Es ist

$$\text{Res}_u(\varepsilon^2 \Psi) = -\cancel{\varepsilon^4 \partial_x^2 A} - 2\varepsilon^6 \partial_T \partial_x A - \varepsilon^8 \partial_T^2 A + \cancel{\varepsilon^4 \partial_x^2 A} - \varepsilon^6 \partial_x^4 A + \varepsilon^6 \partial_x^2 A.$$

Löst A die KdV-Gleichung mit Koeffizienten wie in Satz 5.4 behauptet, dann ist

$$\text{Res}_u(\varepsilon^2 \Psi) = -\varepsilon^8 \partial_T^2 A.$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \partial_T^2 A &= -\frac{1}{2} \partial_T (\partial_x^3 A + \partial_x(A^2)) = -\frac{1}{2} (\partial_x^3 \partial_T A + 2 \partial_x(A \partial_T A)) \\ &= \frac{1}{4} \partial_x^3 (\partial_x^3 A + \partial_x(A^2)) + \frac{1}{2} \partial_x (A (\partial_x^3 A + \partial_x(A^2))). \end{aligned}$$

bzgl. "groß x"

Da  $A(T)$  nach Voraussetzung in  $H_x^7$  liegt, können wir  $\|\partial_T A\|_{H^1}$  und damit  $\|\text{Res}_u(\varepsilon^2 \Psi)\|_{H^1}$  abschätzen und erhalten:

$$\sup_{t \in [0, T_0 \varepsilon^{-3}]} \|\text{Res}_u(\varepsilon^2 \Psi(\cdot, t))\|_{H_x^1} \leq C_{\text{Res}} \varepsilon^{15/2},$$

bzgl. "klein x"

$$\sup_{t \in [0, T_0 \varepsilon^{-3}]} \|\partial_x^{-1} \text{Res}_u(\varepsilon^2 \Psi(\cdot, t))\|_{H_x^1} \leq C_{\text{Res}} \varepsilon^{13/2}$$

für ein  $C_{\text{Res}} > 0$ . Beachte hierbei, dass  $\|\cdot\|_{L_x^2} = \varepsilon^{-1/2} \|\cdot\|_{L_X^2}$  (folgt aus dem Transformationssatz) und  $\partial_x^{-1} = \varepsilon^{-1} \partial_X^{-1}$  ist.

3. Schritt: Schreibe  $u$  als Approximation + Fehler, also

$$u = \varepsilon^2 \Psi + \varepsilon^{7/2} R,$$

stelle die Differentialgleichung für  $R$  auf und schätze  $R(t)$  auf  $[0, T_0 \varepsilon^{-3}]$  ab. Es gilt

$$\partial_t^2 R = \partial_x^2 R - \partial_x^4 R + 2\varepsilon^2 \partial_x^2 (\Psi R) + \varepsilon^{7/2} \partial_x^2 (R^2) + \varepsilon^{-7/2} \text{Res}_u(\varepsilon^2 \Psi). \quad (26)$$

Multipliziere (26) mit  $-\partial_t \partial_x^{-2} R$  und integriere bzgl.  $x$ . Dies liefert

↳ z.B. über Fouriertrafo erklärt

Linke Seite:

$$\int_{\mathbb{R}} -(\partial_t \partial_x^{-2} R) \partial_t^2 R \, dx \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{R}} (\partial_t \partial_x^{-1} R)^2 \, dx.$$

Rechte Seite:

$$\int_{\mathbb{R}} -(\partial_t \partial_x^{-2} R) \partial_x^2 R \, dx = -\frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{R}} R^2 \, dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_t \partial_x^{-2} R) \partial_x^4 R \, dx = -\partial_t \int_{\mathbb{R}} (\partial_x R)^2 \, dx$$

$$-\int_{\mathbb{R}} (\partial_t \partial_x^{-2} R) \partial_x^2 (\Psi R) \, dx = -\int_{\mathbb{R}} (\partial_t R) \Psi R \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{R}} \Psi R^2 \, dx + \underbrace{\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \partial_x \Psi R^2 \, dx}_{=: I_1}$$

$$-\int_{\mathbb{R}} (\partial_t \partial_x^{-2} R) \partial_x^2 (R^2) \, dx = -2 \int_{\mathbb{R}} \partial_t R \cdot R^2 \, dx$$

$$= -\frac{2}{3} \partial_t \int_{\mathbb{R}} R^3 \, dx$$

$$-\int_{\mathbb{R}} (\partial_t \partial_x^{-2} R) \operatorname{Res}_n(\varepsilon^2 \Psi) \, dx = -\underbrace{\int_{\mathbb{R}} (\partial_t \partial_x^{-1} R) \partial_x^{-1} \operatorname{Res}_n(\varepsilon^2 \Psi) \, dx}_{=: I_2},$$

wobei

$$|I_1| \leq \underbrace{\|\partial_t \Psi\|_{L^\infty}}_{< \infty} \cdot \|R\|_{L^2}^2,$$

$$|I_2| \leq \|\partial_t \partial_x^{-1} R\|_{L^2} \cdot \|\partial_x^{-1} \operatorname{Res}_n(\varepsilon^2 \Psi)\|_{L^2}.$$

Wir definieren folglich die Energie

$$E = \int_{\mathbb{R}} (\partial_t \partial_x^{-1} R)^2 + R^2 + (\partial_x R)^2 + 2\varepsilon^2 \Psi R^2 + \frac{4}{3} \varepsilon^{7/2} R^3 \, dx.$$



$\Rightarrow \forall M > 0 \exists C_1, \varepsilon_1 > 0 \forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_1[$ :

$$\|R\|_{H^1} \leq C_1 \sqrt{\varepsilon}, \text{ solange } E \leq M.$$

Außerdem erfüllt  $E$  die Differentialungleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &\leq \tilde{C} (\varepsilon^3 E + \varepsilon^3 E^{1/2}) \\ &\leq C \varepsilon^3 (E + 1) \end{aligned}$$

mit  $C > 0$  unabhängig von  $\varepsilon$ . Mit Hilfe der Gronwallschen Ungleichung folgt daraus, dass

$$\sup_{t \in [0, T_0 \varepsilon^{-3}]} E(t) = C T_0 e^{C T_0} =: M = \mathcal{O}(1).$$

Damit erhalten wir für hinreichend kleines  $\varepsilon$  die Behauptung des Satzes 5.4.

□

Bem.:

Zum Beweis der lokalen Existenz und Eindeutigkeit der Boussinesq-Gleichung schreibt man die Gleichung als System von zwei Gleichungen erster Ordnung bzgl.  $\partial_t$  für die Variablen  $u$  und  $\partial_t(\partial_x^4 + \partial_x^2)^{-1/2} u$ . Untersucht man die Variation der Konstanten-Formel für dieses System, dann kann man im Raum  $C^0([-T_*, T_*], H^s \times H^s)$  für  $s \geq 1$  und hinreichend kleines  $T_*$  die Kontraktionseigenschaft nachweisen und den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Boussinesq-Gleichung kombiniert mit den Fehlerabschätzungen des vorigen Satzes liefert (durch itierte Anwendung der lokalen Ex.-und-Eind.-Aussage) die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Boussinesq-Gleichung für  $t \in [T_0, \varepsilon^{-3}]$  für Anfangsdaten wie im Fall der KdV-Approximation, die Regularität ist  $u(\cdot, t), \partial_t(\partial_x^4 + \partial_x^2)^{-1/2} u(\cdot, t) \in H^1$  (durch naheliegende Verallgemeinerung der Fehlerabschätzungen auf  $H^s$  mit  $s > 1$  erhält man auch  $u(\cdot, t), \partial_t(\partial_x^4 + \partial_x^2)^{s/2} u(\cdot, t) \in H^s$ ,  $s > 1$ , wenn auch die Anfangsdaten in  $H^s$  sind).