1 Überblick

Ein Grundkonzept der Stabilitätstheorie in dissipativen Systemen ist die Kontrolle der nichtlinearen Terme durch das linearisierte Problem, wenn die Linearisierung eine Dämpfung mit einer exponentiellen Rate zeigt. Ein solches Verhalten tritt auf, wenn das Spektrum in der linken Halbebene liegt und von der imaginären Achse gleichmäßig wegbeschränkt ist. Für partielle Differentialgleichungen auf räumlichen unbeschränkten Gebieten, wie der reellen Achse oder dem $\mathbb{R}^d$, gibt es jedoch eine Reihe relevanter Stabilitätsprobleme, bei denen das wesentliches Spektrum bis zur imaginären Achse reicht. In dieser Vorlesung werden Methoden vorgestellt, die es erlauben auch in diesem Fall aus der spektralen Stabilität auf die nichtlineare Stabilität zu schließen.

Für die Probleme, die uns interessieren, zeigt das lineare Problem diffusives Verhalten und polynomiale Abfallraten. So zeigt die lineare Diffusionsgleichung

$$\partial_t u = \partial_x^2 u$$

auf der reellen Achse zwar für räumlich konstante Anfangsbedingungen keinerlei Abfallraten, aber für raümlich lokalisierte Anfansbedingungen in $L^1 \cap L^\infty$ verschwindet die Supremumsnorm wie $1/\sqrt{t}$. Eine typische Lösung ist

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-x^2/(4t)}.$$

Für diese sehen wir, dass $\partial_t u \sim t^{-3/2}$, $\partial_x^2 u \sim t^{-3/2}$ und $u^p \sim t^{-p/2}$ für $t \to \infty$. Infolgedessen können z.B. für

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + u^p$$

nicht alle nichtlinearen Terme u^p durch das linearisierte Problem $\partial_t u = \partial_x^2 u$ kontrolliertt werden, sondern nur die mit $p > 3$.

Überraschenderweise stellt sich heraus, dass für viele interessante Probleme aus der Physik genau dieses Verhalten auftritt und die auftretenden effektiven nichtlinearen Terme irrelevant sind. In den 1990er Jahren wurde festgestellt, dass das Konzept des diffusiven Verhaltens und der irrelevanten Nichtlinearitäten eine wichtige Rolle bei Stabilitätsfragen von musterbildenden Systemen, wie Reaktions-Diffusions-Systemen oder hydrodynamischen Stabilitätsproblemen, wie dem Couette-Taylor-Problem, dem Bénardproblem oder dem Fluß entlang einer schiefen Ebene, spielt. Auch beim Mischen von stabilen Zuständen spielt diffusives Verhalten eine wichtige Rolle. Dieses geschieht meist in selbstähnlicher Art und Weise.

Zeigen konservative, d.h. energieerhaltende, gewöhnliche Differenzialgleichungen oder partielle Differenzialgleichungen auf beschränkten Gebieten keinerlei Dämpfung, so ist dies auf räumlichen unbeschränkten Gebieten, wie der reellen Achse oder dem $\mathbb{R}^d$, anders. Dispersion, das Verteilen der Energie auf der reellen Achse oder dem $\mathbb{R}^d$, führt ebenfalls zu polynomialen Abfallraten in der Supremumsnorm. Für die Lösungen der linearen

Schrödingergleichung

$$i\partial_t u = \partial_x^2 u$$

auf der reellen Achse zu raümlich lokalisierten Anfansbedingungen in $L^1 \cap L^\infty$ verschwindet die Supremumsnorm wie $1/\sqrt{t}$. Dieses dispersive Verhalten wurde schon seit den 1960 Jahren verwendet, um globale Existenzresultate für nichtlineare Wellengleichungen wie

$$\partial_t^2 u = \Delta u + u^p$$

zu beweisen. So konnte gezeigt werden, dass ein nahezu flaches Weltall ohne Massen gegen die flache Raum-Zeit, d.h. gegen die Minkovski-Metrik konvergiert.

Das Ziel des ersten Teiles der Vorlesung soll sein, in die dazu nötigen Methoden, wie die Fourier-Transformation, L^p-L^q-Abschätzungen, Renormalisierungstheorie und die Methode der stationären Phase einzuführen. Im zweiten Teil soll gezeigt werden, wo überall diffusives und dispersives Verhalten auftritt und jeweils die Irrelevanz der effektiven Nichtlinearität gezeigt werden. Es handelt sich um ein hochaktuelles Forschungsgebiet, das in immer mehr Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle spielt.